

Spezielle Relativitätstheorie

F. Hassler

2014

Professor Dr. F. Hassler
Institut für Quanteninformationstheorie
RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

1	Relativitätsprinzip	1
1.1	Galileisches Relativitätsprinzip	2
1.1.1	Inertialsystem	3
1.1.2	Galilei-Transformation	3
1.1.3	Kovarianz der newtonschen Gleichungen	4
1.2	Einsteinsches Relativitätsprinzip	5
1.2.1	Michelson-Morley Experiment	5
1.2.2	Einsteinsches Postulat	7
2	Lorentz-Transformation	11
2.1	Transformation zwischen Inertialsystemen	12
2.2	Lorentz-Gruppe	13
2.2.1	Eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe	15
2.3	Struktur der Poincaré-Gruppe	17
2.4	Addition von Geschwindigkeiten	18
2.5	Minkowski-Diagramme	21
2.5.1	Relativistische Kausalität	21
2.5.2	Lorentz-Boosts	22
3	Relativistische Mechanik	25
3.1	Vierergeschwindigkeit	25
3.2	Energie-Impuls Beziehung	26
3.3	Bewegungsgleichung	27
3.3.1	Kräftefreies Teilchen	28
3.3.2	Teilchen in einem Potential	29

3.4	Drehimpuls	33
4	Maxwell-Gleichungen	35
4.1	Invarianten des Feldes	35
4.2	Homogene Gleichungen	36
4.3	Wirkung des elektromagnetischen Feldes	36
4.4	Inhomogene Maxwell-Gleichungen	38
4.5	Transformation der elektromagnetischen Felder	39
4.6	Energie-Impuls-Tensor	40
4.6.1	Erhaltungssätze in Anwesenheit von geladener Materie	42
4.7	Energie-Impuls-Tensor makroskopischer Körper	43
4.8	Feld einer bewegten Ladung	44
4.9	Doppler-Effekt	47
4.10	Ideale Flüssigkeit	48
4.11	Thermodynamik	49
4.11.1	Schwarzkörperstrahlung	49
4.12	Ideales Gas	50
5	Allgemeine Relativitätstheorie	53
5.1	Geodätengleichung	53
5.2	Äquivalenzprinzip	55
5.3	Entfernungen und Zeitintervalle	56
5.4	Beschleunigte Bezugssysteme	58
5.4.1	Ruhsystem eines konstant-beschleunigten Beobachters	58
5.4.2	Geodäten	60
5.4.3	Unruh-Effekt	61
5.5	Rotierendes Bezugssystem	62
5.6	Schwaches Gravitationsfeld	63
5.7	Schwarzschild-Metrik	64
5.7.1	Eddington-Finkelstein-Metrik	66
5.7.2	Nichtrelativistischer Grenzfall	67
5.7.3	Metrik in der Nähe des Ereignishorizonts	67
5.7.4	Geodäten	68

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	v
5.7.5 Periheldrehung	69
5.7.6 Lichtablenkung	70
5.7.7 Stabilität der kreisförmigen Orbits	71
A Tensoren	73

Literatur

J. D. Jackson

Classical Electrodynamics

(Jon Wiley & Sons, New York, 1998)

gut, ist das Standardwerk für die Elektrodynamik

A. M. Steane

Relativity Made Relatively Easy

(Oxford University Press, Oxford, 2012)

modern, erklärt die Konzepte, sowohl SRT als auch ART

W. Pauli

Relativitätstheorie

(Springer, Berlin, 2000)

Klassiker, kompakt, enthält auch die ART

W. Nolting

Grundkurs: Theoretische Physik 4

(Springer, Berlin, 2002)

enthält Übungsaufgaben inklusive Lösungen

T. Fließbach

Allgemeine Relativitätstheorie

(Springer, Berlin, 2012)

enthält nur den Teil der SRT der für die ART benötigt wird

Kapitel 1

Relativitätsprinzip

In diesem Einleitungskapitel möchten wir einen Teil der klassischen Mechanik repetieren mit einem speziellen Augenmerk auf dem Prinzip der Relativität, um danach für die Spezielle Relativitätstheorie gewappnet zu sein. Die physikalischen finden im dreidimensionalen affinen euklidischen Raum statt. Affin bedeutet in diesem Kontext, dass es keinen (ausgezeichneten) Koordinatenursprung gibt. Erst durch die Festlegung eines (beliebigen) Koordinatenursprungs wird der Raum zum Vektorraum \mathbb{R}^3 .

Die Position eines Objektes in diesem Raum wird durch den Ortsvektor \mathbf{r} beschrieben. Für die Beschreibung der Bewegung des Objektes führen wir den Zeitparameter t ein, so dass $\mathbf{r}(t)$ die Bahnkurve des Objektes darstellt. In der klassischen Mechanik ist t ein globaler Parameter, welcher in Einheiten einer periodischen Bewegung (z. B. einer Pendel- oder Atomuhr) gemessen wird. Nachdem man sich auf eine Zeiteinheit geeinigt hat, unterscheiden sich die Zeiten in verschiedenen Bezugssystemen um höchstens eine Konstante.

Der Ortsvektor ist abhängig vom Koordinatenursprung und kann daher nicht in physikalischen Gesetzen auftreten. In diese dürfen nur Vektoren wie etwa der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$ auftreten, welcher unabhängig von einer konkreten Wahl des Koordinatenursprungs ist.¹ Vektoren sind keine Messgrößen. Um einen Punkt im Ortsraum festzulegen, braucht es neben der Wahl des Koordinatenursprungs auch die Festlegung einer Einheit (z. B. dem Urmeter) und die Wahl der Koordinatenachsen. Drei senkrecht aufeinanderstehende Lineale mit Einheitslänge bilden so ein Koordinatensystem. Wir beschreiben dies durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, welche jeweils vom Anfang zum Endes des jeweiligen Lineals zeigen. Da die Vektoren ein Orthonormalsystem bilden, erfüllen sie $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Nach der Wahl der Basis, kann man den Vektor eindeutig durch seine kartesische Koordinaten r_i

¹In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird der Geschwindigkeitsvektor ein Element des Tangentialraumes an einem Punkt \mathbf{r} .

beschrieben werden mit²

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i = r_i \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Wir können uns nun die Frage stellen, in welcher Beziehung die Koordinaten zweier solcher Koordinatensysteme im Allgemeinen stehen. Dafür führen wir eine zweite orthonormierte Basis \mathbf{e}'_i ein (auf welche sich ein anderer Beobachter festgelegt hat). Da die Basis \mathbf{e}_i vollständig ist, kann man die neuen Basisvektoren \mathbf{e}'_i als Linearkombination der alten Basisvektoren \mathbf{e}_i schreiben, d. h. wir haben $\mathbf{e}'_i = R_{ij} \mathbf{e}_j$ mit den Matrixelementen $R_{ij} \in \mathbb{R}$.³ Aus der Forderung, dass sowohl das alte wie auch das neue Koordinatensystem orthonormiert ist, erhalten wir

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = R_{ik} R_{jl} \underbrace{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l}_{=\delta_{kl}} = R_{ik} R_{jk} = (RR^t)_{ij}, \quad (1.2)$$

d. h. die Transformation ist orthonormal $R \in O(3)$ mit $R^{-1} = R^t$. Die neuen Koordinaten r'_i erhält man aus

$$r_j \mathbf{e}_j = \mathbf{r} = r'_i \mathbf{e}'_i = r'_i R_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (1.3)$$

d. h. $r_j = (R^t)_{ji} r'_i$ was äquivalent ist zu $r'_j = R_{ji} r_i$. Im Weiteren verwenden wir die Notation $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ für die Koordinaten des Vektors \mathbf{r} (und nicht für den Vektor selbst). Damit können wir die Transformationsregel kompakt schreiben als $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$. Die Wahl eines (möglicherweise zeitabhängigen) Koordinatensystems und einer Zeitmessung nennt man ein Bezugssystem. Einen Punkt in der Raumzeit beschrieben durch (t, \mathbf{r}) in einem Bezugssystem nennen wir ein Ereignis.

1.1 Galileisches Relativitätsprinzip

Das Relativitätsprinzip beruht auf der Tatsache, dass es kein bevorzugtes Bezugssystem gibt. Die Bewegung eines physikalischen Objektes solle nur von der (relativen) Position zu den anderen Objekten abhängen und nicht von der Wahl des Bezugssystems. Zudem fordert man, dass die physikalischen Gesetze in gewissen Bezugssystemen gleich aussehen.

²Beachten Sie die einsteinsche Summenkonvention: über doppel auftretende Indizes wird summiert.

³Als Beispiel betrachten wir ein Bezugssystem S' , welches um θ bezüglich der \mathbf{e}_3 Achse von S gedreht ist. Mit Hilfe elementarer Geometrie erhalten wir den Ausdruck $R(\theta \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.1 Inertialsystem

Die Form der physikalischen Gesetze hängt im Allgemeinen vom Bezugssystem ab. In der klassischen Mechanik gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme, in welchen die Bewegungsgleichungen eine besonders schöne Form haben. Solche Systeme heißen Inertialsysteme und in ihnen gilt das newtonsche Gesetz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

wobei m die Masse des Teilchen, \mathbf{p} der Impuls und \mathbf{F} die Kraft, welche auf das Teilchen wirkt bezeichnet. Im Besonderen bewegen sich kräftefreie Teilchen in Inertialsystemen auf Geraden mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (1.5)$$

Empirisch findet man, dass der Fixsternhimmel ein Inertialsystem darstellt.

1.1.2 Galilei-Transformation

Man kann sich jetzt die Frage stellen, wie man ausgehend von einem Inertialsystem S , weitere Inertialsysteme S' finden kann. Dafür untersuchen wir allgemeine Transformationen $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t) = R(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{d}(t)$ und $t \mapsto t' = t + t_0$ mit $R(t) \in O(3)$. Wenn man nun die Fall eines kräftefreien Massenpunktes betrachtet, fordern wir

$$0 = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \ddot{R}\mathbf{r} + 2\dot{R}\dot{\mathbf{r}} + R\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{d}} = \ddot{R}\mathbf{r} + 2\dot{R}\dot{\mathbf{v}}_0 + \ddot{\mathbf{d}}. \quad (1.6)$$

wobei wir die allgemeine Parameterisierung (1.5) eines kräftefreien Massenpunktes verwendet haben. Da diese Gleichung für alle möglichen Bahnkurven gelten sollten, müssen wir fordern, dass $\dot{R} = 0$ und $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, d. h. $R(t) = R$ und $\mathbf{d}(t) = -\mathbf{w}t + \mathbf{d}_0$.

Wir haben damit alle möglichen Transformationen bestimmt, welche ein Inertialsystem auf ein anderes Inertialsystem abbilden. Dies Transformationen

$$t' = t + t_0, \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{r} - \mathbf{w}t + \mathbf{d}_0, \quad (1.7)$$

heißen Galilei-Transformationen und bilden eine 10-parametrische Gruppe mit den Parametern t_0 (1), R (3), \mathbf{w} (3) und \mathbf{d}_0 (3 Parameter). Wir sehen somit, dass sich je zwei Inertialsysteme mit einer konstanten Geschwindigkeit \mathbf{w} gegeneinander bewegen und ansonsten nur die Koordinatenachsen verschoben \mathbf{d}_0 und gedreht R sind, siehe Abb. 1.1

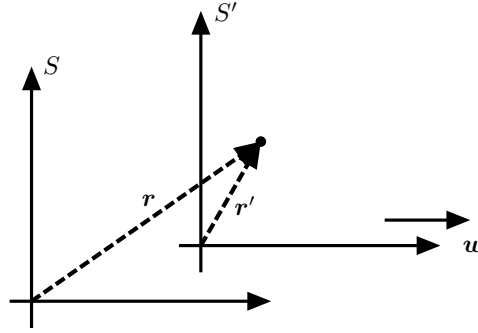


Abb. 1.1: Zwei Bezugssysteme S und S' , welche mit der Geschwindigkeit w gegeneinander zueinander bewegt sind. Die Koordinaten r und r' eines Objektes in den zwei Bezugssystemen stehen via $r' = r - wt + d_0$ und $t' = t + t_0$ miteinander in Beziehung ($R = \mathbb{1}_3$).

1.1.3 Kovarianz der newtonschen Gleichungen

Eine Gleichung $G(X_{r,t}) = 0$ heißt kovariant oder forminvariant bezüglich der Galilei-Transformationen, wenn sie ausgedrückt durch die transformierten Größen $X'_{r',t'}$ dieselbe Form besitzt, d. h. $G(X_{r,t}) = 0$ ist äquivalent zu $G(X'_{r',t'}) = 0$. Damit können wir das galileische Relativitätsprinzip durch die zwei äquivalenten Aussagen beschreiben:

- Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen dieselbe Form.
- Die Naturgesetze sind Galilei-kovariant, d. h. forminvariant unter Galilei-Transformationen.

Daraus folgt sofort, dass ein Beobachter durch Messungen nicht entscheiden kann, in welchem Inertialsystem er sich befindet. Insbesondere sind alle Inertialsystem äquivalent.

Die newtonschen Gleichungen $F = m\ddot{r}$ sind kovariant, vorausgesetzt F ist ein Vektorfeld, d. h. F transformiert (punktweise) wie ein Vektor

$$F'(r') = RF(r), \quad (1.8)$$

wobei r' und r durch eine Galilei-Transformation (1.7) verknüpft sind. Es ist einfach nachzurechnen, dass $\dot{r}' = R\dot{r}$. Damit können wir die Kovarianz der Newtongleichung zeigen

$$F'(r') = m'\ddot{r}' \Leftrightarrow RF(r) = m'R\ddot{r} \Leftrightarrow F(r) = m\ddot{r}, \quad (1.9)$$

wobei wir voraussetzen mussten, dass die Masse invariant ist $m = m'$.

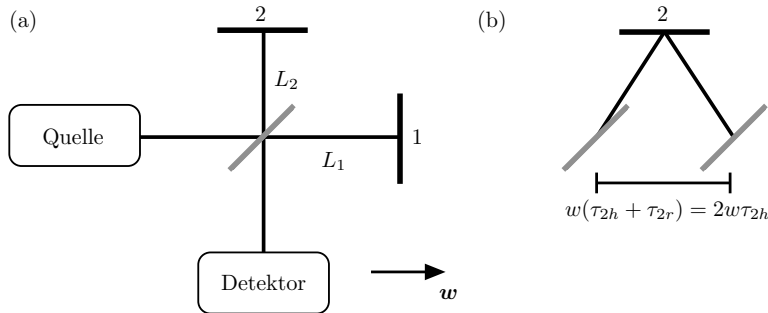


Abb. 1.2: (a) Schematischer Aufbau des Michelson Interferometers zur Messung der Erdgeschwindigkeit w relativ zum ruhenden Äther. Das Licht, welches von der Quelle ausgesendet wird, geht zuerst durch einen halbdurchlässigen Strahlteiler (grau). Nachdem die zwei Strahlen die Strecken $2L_1$ bzw. $2L_2$ zurückgelegt haben, wird ihre Interferenz am Detektor registriert. Im einfachsten Fall ist die Bewegungsrichtung der Erde entlang des Arms 1. Dadurch ergibt sich die Ausbreitung des Lichtes im Arm 2 von einem ruhenden Bezugssystem aus gesehen wie in (b) gezeigt.

1.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

1.2.1 Michelson-Morley Experiment

Die maxwellschen Gleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \text{ m/s}$ ausbreiten. Allerdings war es nicht klar, bezüglich welches Bezugssystemes diese Geschwindigkeit gilt. Ausgehend von den Galilei-Transformationen ist es einfach zu sehen, dass für ungedrehte Koordinatenachsen ($R = \mathbb{1}_3$) sich Geschwindigkeiten einfach addieren. Betrachten wir ein Objekt, welches sich auf der Bahn $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}'t$ mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}' im System S' bewegt. Dasselbe Objekt bewegt sich dann im System S mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'. \quad (1.10)$$

Insbesondere bewegt sich das Licht in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich schnell.

Michelson (Nobelpreis 1907) entwickelte daher einen experimentellen Aufbau, mit dem sich feststellen lässt, in welchen Bezugssystem (Äther) sich die Lichtwellen isotrop mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Dafür verglich er die Laufzeiten, die das Licht braucht um eine Strecken $2L_1$, $2L_2$ in zwei orthogonale Richtungen zurückzulegen, in einem Interferometer, siehe Abb. 1.2(a). Da sich die Erde mit der Geschwindigkeit $w \simeq 30 \text{ km/s}$ um die Sonne dreht, müssten sich im Laufe des Jahres die Laufzeitunterschiede ändern.

Falls die Erdgeschwindigkeit w bezüglich des Äthers parallel zum Arm 1

liegt, erhalten wir die Laufzeit $\tau_{1h} = L_1/(c - w)$ für den Hinweg und $\tau_{1r} = L_1/(c + w)$ für den Rückweg. Die gesamte Laufzeit, des Lichtstrahles im Arm 1 ist daher gegeben durch

$$\tau_1 = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - w^2/c^2}, \quad (1.11)$$

d. h. korrigiert durch den Faktor $(1 - w^2/c^2)^{-1}$ vom naiven Wert $2L_1/c$ ohne Berücksichtigung der relativen Bewegung zum Äther.

Die Laufzeit im Arm 2, welcher senkrecht zur Erdbewegung steht, sind für die Hin- und den Rückweg gleich $\tau_{2h} = \tau_{2r}$ mit $\tau_2 = 2\tau_{2h}$. Bezüglich des Äthers ist die Geschwindigkeit einfach c . Allerdings ist in diesem Bezugssystem der Weg durch die Bewegung der Spiegel länger. Der Gesamtweg ist gegeben durch $\ell = 2[L_2^2 + w^2\tau_{2h}^2]^{1/2}$, vgl. Abb. 1.2(b). Auflösen der Gleichung $\tau_2 = \ell/c$ nach τ_2 liefert

$$\tau_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \quad (1.12)$$

d. h. eine Reduktion um einen anderen Faktor $(1 - w^2/c^2)^{-1}$.

Das Interferometer misst die Differenz der optischen Weglängen

$$\delta = c(\tau_2 - \tau_1) = \frac{2}{1 - w^2/c^2} \left(L_2 \sqrt{1 - w^2/c^2} - L_1 \right). \quad (1.13)$$

mit einer Genauigkeit $\lambda \simeq 500$ nm gegeben durch die Wellenlänge des Lichtes. Nach einem Vierteljahr ist die Apparatur effektiv um 90° gedreht und wir erhalten eine neue Weglängendifferenz

$$\delta' = c(\tau_2 - \tau_1) = \frac{2}{1 - w^2/c^2} \left(L_2 - L_1 \sqrt{1 - w^2/c^2} \right).$$

da die Rolle von L_1 und L_2 inzwischen getauscht wurde. Die Unterschied der Weglängendifferenzen mit einem Vierteljahr Zeitunterschied ist gegeben durch

$$|\delta' - \delta| = \frac{2(L_2 + L_1)}{1 - w^2/c^2} \left(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2} \right) \stackrel{w \ll c}{\approx} (L_1 + L_2) \frac{w^2}{c^2}. \quad (1.14)$$

Es ist interessant zu sehen, welche Länge der Interferenzarme benötigt wird, um den Effekt der relativen Bewegung der Erde zum Äther zu messen. Mit $w/c \simeq 10^{-4}$ und $\delta' - \delta \simeq \lambda \simeq 10^{-7}$ m erhalten wir $L_1 + L_2 \simeq 10$ m.

Michelson fand, dass das Interferenzmuster unabhängig von der Jahreszeit und damit der Orientierung des Interferometers immer gleich aussieht, woraus man schließen muss, dass es keinen Äther (als ausgezeichnetes Bezugssystem) gibt und dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich ist.

1.2.2 Einsteinsches Postulat

Das Michelson-Morley Experiment führte Einstein (1905) dazu neben dem galileischen Relativitätsprinzip, dass die physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben, das zusätzliche Postulat,

- *die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen denselben Betrag c ,*

zu fordern. Dieses Prinzip ist die Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie. Inertialsysteme sind dabei so definiert, dass in ihnen freie Teilchen, wie in der klassischen Mechanik, dem Trägheitsgesetz $\vec{r} = 0$ folgen. Man sieht sofort, dass die Kovarianz der physikalischen Gesetze nun nicht mehr unter den Galilei-Transformationen gefordert werden dürfen, da diese auf die Geschwindigkeitsadditionsformel (1.10) führen. Im Kapitel 2 werden wir untersuchen, welche Transformationsgruppe kompatibel mit dem einsteinschen Postulat ist. Wir wollen im Folgenden allerdings zuerst ein paar einfache Konsequenzen aus dem einsteinschen Postulat kennenlernen.

Da wir im Abschnitt 1.1.2 gesehen haben, dass wir bei der Annahme einer absoluten Zeit aus dem Relativitätsprinzip sofort die Galilei-Transformationen als allgemeine Transformationen zwischen Inertialsystemen folgen, müssen wir den Begriff einer absoluten Zeit aufgeben und fordern, dass im Allgemeinen $t' \neq t$. Der absolute Wert der Lichtgeschwindigkeit ermöglicht es, Uhren 1 und 2 in zwei Bezugssystemen S und S' zu synchronisieren und somit zumindest zum Teil eine gemeinsame Zeit einzuführen.⁴ Das Protokoll für die Synchronisation zweier Uhren in zwei verschiedenen Inertialsystemen S und S' , welche die Zeit durch denselben periodischen Vorgang messen, ist das folgende: Wir stellen wir uns vor, dass im Bezugssystem S ein Lichtblitz von der Uhr 1 zur Zeit t_0 ausgesandt wird. Der Strahl wird von der Uhr 2 (ruhend im System S') reflektiert, und zur Zeit $t_0 + \Delta t$ von der Uhr 1 detektiert. Da die Lichtgeschwindigkeit absolut ist, können wir den Zeitpunkt des Eintreffens des Lichtstrahls bei der Uhr 2 mit der Zeit $t_0 + \Delta t/2$ im System S identifizieren und damit die Uhren synchronisieren. Weiterhin erlaubt uns die Universalität der Lichtgeschwindigkeit, Längenmessungen auf Zeitmessungen zurückzuführen und den Meter als den 1/299792458ten Teil der Strecke zu definieren, welche ein Lichtstrahl in einer Sekunde zurücklegt. Das Problem der Synchronisation der Uhren ist, dass das Vorgehen nicht transitiv ist. Wenn die Uhren 1 und 2 synchron und außerdem 2 und 3 synchron sind, dann folgt damit nicht, dass auch 1 und 3 synchron sind. Dies führt uns auf den Begriff der Relativität der Gleichzeitigkeit.

⁴Wie wir später sehen werden laufen Uhren, welche zu einem Zeitpunkt synchronisiert wurden, später aber wieder auseinander.

Relativität der Gleichzeitigkeit

Aus der absoluten Zeit in der galileischen Raumzeit folgt, dass zwei Ereignisse, welche gleichzeitig im Bezugssystem S' geschehen, auch gleichzeitig in S stattfinden. Diese Tatsache ist inkompatibel mit dem einsteinschen Postulat der Universalität der Lichtgeschwindigkeit. Um dies zu sehen, betrachten wir zwei Bezugssysteme, welche sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$, $w > 0$ gegeneinander bewegen. Wir betrachten drei Uhren A, B, C auf der x -Achse, welche in S' ruhen. Die Uhr B befindet sich zwischen den Uhren A und C , so dass der Abstand von A zu B gleich dem Abstand von B zu C ist. Ein Beobachter im System S' wird feststellen, dass ein Lichtblitz, welcher zur Zeit t'_B von B ausgesandt wird, gleichzeitig ($t'_A = t'_C$) bei A und C eintrifft.

Aus der Sicht eines Beobachter im (bewegten) System S wird der Lichtblitz zur Zeit t_B von B emittiert und breitet sich auch mit c in alle Richtungen aus. Da sich A zum Lichtblitz hin und C vom Lichtblitz wegbewegt, gilt aus der Sicht von S die Ungleichung $t_A < t_C$. Somit sind Uhren, welche im System S' synchronisiert sind, im System S nicht synchronisiert und daher hängt der Begriff der "Gleichzeitigkeit" vom Bezugssystem ab. Die Abwesenheit eines absoluten Gleichzeitigkeitsbegriffs ist die Ursache für viele der zunächst paradox erscheinenden Konsequenzen des Relativitätsprinzips.

Zeitdilatation

Betrachten wir nun eine Uhr A , welche im System S' ruht und einen Lichtblitz auf einen Spiegel B im Abstand L_0 (orthogonal zur relativen Bewegungsrichtung $-\mathbf{w}$ des Bezugssystems S) sendet. Dieser Lichtblitz wird nach der Zeit $\Delta t' = 2L_0/c$ wieder bei der Uhr A eintreffen. Im Bezugssystem S ist der Spiegel bei B bewegt und der Lichtstrahl muss den Weg $L = \sqrt{4L_0^2 + w^2(\Delta t)^2}$ zurücklegen, siehe Abb. 1.2(b). Nach dem einsteinschen Postulat ist der Weg des Lichtstrahles über c mit der Zeitdifferenz Δt verknüpft, d. h. $L = c \Delta t$. Auflösen diese Gleichung nach Δt liefert das Resultat

$$\Delta t = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - w^2}} = \gamma \Delta t' \quad (1.15)$$

mit dem Zeitdilationsfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} > 1. \quad (1.16)$$

Aus der Sicht von S dauert der Vorgang daher um den Faktor γ länger. Die Zeit, welche von der ruhenden Uhr gemessen wird, bezeichnen wir auch Eigenzeit $\Delta\tau$. Sie ist stets geringer als die Zeitdifferenz in einem bewegten System. Bewegt sich ein Objekt in S mit einer veränderlichen Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ von $x_A = (t_A, \mathbf{r}_A)$ nach $x_B = (t_B, \mathbf{r}_B)$, kann man an

jedem Zeitpunkt t ein momentanes Ruhesystem S'_t mit $\mathbf{w} = \mathbf{v}(t)$ und $\Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} \Delta t$ einführen. Die mit dem Objekt mitbewegte Uhr misst die Eigenzeit

$$\tau = \sum \Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}. \quad (1.17)$$

Die Eigenzeit τ ist eine Eigenschaft der Bahn und daher unabhängig vom Inertialsystem. Dies ist sofort klar, da τ physikalisch durch den Zeigerstand der mitbewegten Uhr bestimmt wird.

Wenn sich zwei Beobachter relativ zueinander bewegen, dann schließen beide, dass die Uhr des jeweils anderen langsamer geht. Dies erscheint zunächst paradox, führt aber auf keinen Widerspruch, da Gleichzeitigkeit relativ ist.

Die Zeitdilatation ist wichtig im Verständnis des Myonzerfalls. Kosmische Strahlung erzeugt Myonen in ca. 10 Kilometern Höhe. Diese Myonen haben eine relativ kurze Lebenszeit von $\simeq \mu\text{s}$. In dieser Zeit legen die Myonen nur eine Strecke von ein paar hundert Metern zurück. Trotzdem findet man viele Myonen, welche auf der Erdoberfläche auftreffen. Man kann dieses Resultat verstehen, wenn man berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit der Myonen nahezu Lichtgeschwindigkeit ist mit $w = 0.994c$ folgt $\gamma \simeq 10$. Damit ist die Lebenszeit der Myonen im Erdsystem zehnmal länger und die Myonen bewegen sich mehrere Kilometer bevor sie zerfallen. Die Betrachtung dieses Problems aus dem Ruhesystem der Myonen führt uns auf den Begriff der Längenkontraktion, welchen wir im Folgenden behandeln.

Längenkontraktion

Wie im vorhergehenden Abschnitt betrachten wir eine im System S' ruhende Anordnung einer Uhr A und eines Spiegels B im Abstand L_0 . Allerdings sei dieses Mal der Lichtweg parallel zur relativen Bewegung der zwei Bezugssysteme (d. h. die Uhr ist im Vergleich zum letzten Abschnitt um 90° gedreht). Die Entfernung von A und B wird durch die Laufzeit des Lichtes $\Delta t'$ über $L_0 = c \Delta t'/2$ festgelegt. Betrachten wir nun das System im bewegten Bezugssystem S . Sei Δt_h die Laufzeit des Lichtes für den Hinweg (von A nach B). In dieser Zeit, hat sich der Spiegel um $w \Delta t_h$ bewegt. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt daher, dass $c \Delta t_h = L + w \Delta t_h$ mit L der Abstand der beiden Spiegel im System S . Daraus erhält man für die Laufzeit beim Hinweg $\Delta t_h = L/(c - w)$. Mit einer äquivalenten Überlegung erhält man für den Rückweg $\Delta t_r = L/(c + w)$. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man für die gesamte Laufzeit den Ausdruck $\Delta t = \Delta t_h + \Delta t_r = 2\gamma^2 L/c$. Andererseits gilt auf Grund der Formel für die Zeitdilatation $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Auflösen der Gleichung $2L_0 = c \Delta t' = 2\gamma L$ nach L liefert die Längenkontraktionsformel

$$L = L_0 \sqrt{1 - w^2/c^2} = L_0/\gamma; \quad (1.18)$$

d. h. ein bewegter Maßstab erscheint gegenüber dem Ruhezustand um den Faktor γ (in die Bewegungsrichtung) verkürzt. Mit der Längenkontraktion können wir das Myonproblem vom Ruhesystem des Myons aus als Verkürzung des Abstandes Erdoberfläche-Entstehungsort der Myonen verstehen. In dieser Weise bedingen Längenkontraktion und Zeitdilatation einander und führen nur zusammen zu einer konsistenten relativistischen Beschreibung.

Kapitel 2

Lorentz-Transformation

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass das einsteinsche Postulat, welches durch das Michelson-Morley Experiment gestützt wird, uns zwingt, unsere Vorstellungen von Zeit und Raum zu überdenken. Insbesondere müssen wir uns von dem Begriff einer absoluten Zeit verabschieden. Wir wollen in diesem Kapitel das einsteinsche Postulat zu einer mathematischen Theorie entwickeln, welche es uns erlaubt, neue Naturgesetze aufzustellen, welche mit dem einsteinschen Postulat kompatibel sind. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, durch was die neuen Transformationen zwischen Inertialsystemen sind.

Ähnlich wie die Galilei-Transformationen die newtonschen Gleichungen invariant lassen, sind die Lorentz-Transformationen die Gruppe der Transformationen, welche das Trägheitsgesetz und das einsteinsche Postulat invariant lassen. Insofern erlauben die Lorentz-Transformationen in der Speziellen Relativitätstheorie aus einem Inertialsysteme in ein beliebiges anderes Inertialsystem zu wechseln. Danach verbleibt die Aufgabe eine relativistische (d. h. lorentz-invariante) Formulierung der Mechanik und der Elektrodynamik zu finden, welche wir im nächsten Kapitel untersuchen werden. Dabei wird sich zeigen, dass die Maxwell-Gleichungen bei passender Transformation der Felder bereits lorentz-invariant sind. Dahingegen bedarf die newtonsche Mechanik einer Änderung. Der Grund ist, dass Fernwirkungsgesetze (z. B. das newtonsche Gravitationsgesetz) a priori nicht-relativistisch sind, da sie sich auf den "Abstand zweier Körper zur gleichen Zeit" berufen. Dieser Begriff ist inkompatibel mit der Relativität der Gleichzeitigkeit. Daher müssen in der Relativitätstheorie alle Fernwirkungsgesetze durch Felder mit relativistischen Feldgleichungen wie in den Maxwell-Gleichungen ersetzt werden.

2.1 Transformation zwischen Inertialsystemen

Zunächst erscheint es als ob das einsteinsche Postulat dem Trägheitsgesetz widerspricht. Dieses Gefühl ist allerdings der Tatsache geschuldet, dass wir fest in unserem klassischen Bild der Welt verwurzelt sind und das einsteinsche Postulat, wie im letzten Kapitel gesehen, einhergeht mit dem Verlust des absoluten Begriffes der Gleichzeitigkeit und daher zur Einführung einer Zeit pro Bezugssystem führt. Um die Gruppe der Lorentz-Transformationen zu erhalten, betrachten wir zwei Inertialsysteme S und S' , welche sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{w} relativ zueinander bewegen.

Wir betrachten einen Lichtblitz, der bei (t_1, \mathbf{r}_1) ausgesendet wird und später bei (t_2, \mathbf{r}_2) eintrifft. Wegen dem einsteinschen Postulat gilt sowohl

$$(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0 \quad \text{als auch} \quad (\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0 \quad (2.1)$$

mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Die Bewegungen eines kräftefreien Teilchens in einem Inertialsystem sind gegeben durch Geraden, siehe (1.5). Aus der Forderung, dass eine Lorentz-Transformation Inertialsysteme aufeinander abbilden soll, folgt sofort, dass sie Geraden auf Geraden abbildet. Dies ist äquivalent dazu, dass die Lorentz-Transformation eine lineare Abbildung von $(\Delta t, \Delta \mathbf{r})$ nach $(\Delta t', \Delta \mathbf{r}')$ ist. Auf Grund der Linearität der Transformation ist (2.1) äquivalent zu¹

$$(\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = \kappa(\mathbf{w})[(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2]. \quad (2.2)$$

Betrachten wir nun ein weiteres Bezugssystem S'' , welches sich mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{w}$ relativ zu S' bewegt, dann erhalten wir

$$(\Delta \mathbf{r}'')^2 - c^2(\Delta t'')^2 = \kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w})[(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2].$$

Da S'' relativ zu S ruht ist $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}''$ und $\Delta t = \Delta t''$, woraus folgt dass $\kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w}) = 1$. Wegen der Isotropie des Raumes darf $\kappa(\mathbf{w})$ zudem nicht von der Richtung der relativen Bewegung sondern nur vom Betrag w abhängen. Daraus können wir schließen, dass $\kappa(-\mathbf{w})\kappa(\mathbf{w}) = \kappa(w)^2 = 1$ und somit $\kappa(w) = 1$.²

Die Resultate lassen sich am Besten zusammenfassen indem man Ort und Zeit zu den 4er Koordinaten

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r}) \quad (2.3)$$

eines Teilchens zusammenfasst. Damit sind die Lorentz-Transformationen dadurch definiert, dass sie das Quadrat des Abstandes

$$\Delta s^2 = (\Delta x') \cdot (\Delta x') = (\Delta x) \cdot (\Delta x) = (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = \eta_{\mu\nu} (\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu \quad (2.4)$$

¹Eine lineare Abbildung bildet ein homogenes Polynom vom Grad 2 auf ein homogenes Polynom vom Grad 2 ab. Da $(\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta \mathbf{r}')^2 - c^2(\Delta t')^2 = 0$ folgt aus der Homogenität sofort (2.2).

²Die alternative Lösung $\kappa(w) = -1$ kann verworfen werden, da $\kappa = 1$ bei $w = 0$.

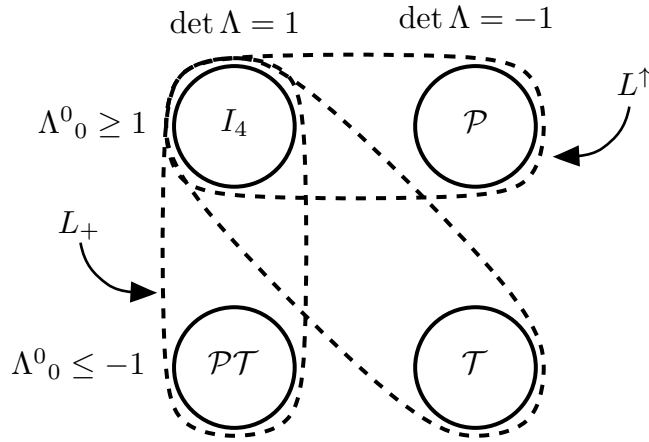


Abb. 2.1: Struktur der Lorentz-Gruppe: die Lorentz-Gruppe L zerfällt in vier disjunkte Komponenten charakterisiert durch $\det \Lambda = \pm 1$ und $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$.

invariant lassen,³ mit der Minkowski-Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Eine allgemeine affine Transformation zwischen den Bezugssystemen S und S' kann geschrieben werden als $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ mit $a \in \mathbb{R}^4$ und $\Lambda \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$. Die Bedingung (2.4) führt auf die Einschränkung

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta (\Delta x)^\alpha (\Delta x)^\beta = \eta_{\mu\nu} (\Delta x')^\mu (\Delta x')^\nu = \eta_{\mu\nu} (\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu$$

was äquivalent ist zu

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

oder in Matrixnotation $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$. Transformationen, welche die Bedingung (2.6) erfüllen, nennt man Elemente der Lorentz-Gruppe, welche man mit $L = \text{O}(1, 3)$ bezeichnet. Die Gruppe der Transformationen, welche Inertialsysteme mit festen Maßstäben verbinden, ist die Gruppe der inhomogenen Lorentz-Transformationen mit $x' = \Lambda x + a$, auch Poincaré-Gruppe genannt.

2.2 Lorentz-Gruppe

Wir betrachten ein Element $\Lambda \in L$. Aus der Relation (2.6) lassen sich eine Reihe von Eigenschaften von Λ ableiten. Bildung der Determinanten liefert

³Ganz analog zu der Tatsache, dass die Rotationen R den Abstand $\sqrt{(\Delta \mathbf{r})^2}$ invariant lassen.

sofort $\det^2 \Lambda = 1$. Somit enthält L in zwei Komponenten charakterisiert durch $\det \Lambda = \pm 1$.⁴ Zudem erhält man für die (00)-Komponenten die Eigenschaft $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = 1$, d. h. $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$. Somit enthält die Lorentz-Gruppe zwei disjunkte Komponenten charakterisiert durch das Vorzeichen von Λ^0_0 .

Dass alle vier Fälle auftreten, zeigen die Spiegelungen

$$\begin{aligned} I_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{PT} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit \mathcal{P} der Spiegelung am Koordinatenursprung (Parität) und \mathcal{T} der Zeitumkehr. Die Spiegelungen bilden eine Untergruppe von L . Weitere Untergruppen sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1\}, & \text{die eigentlichen Lorentz-Transformationen,} \\ L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1\}, & \text{die orthochronen Lorentz-Transformationen,} \\ L^\uparrow_+ &= L_+ \cap L^\uparrow. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Eine Lorentz-Transformation bildet nach Definition den Lichtkegel mit $\Delta s^2 = 0$ auf sich selbst ab. Vektoren auf dem Lichtkegel mit $v \cdot v = 0$ bezeichnet man auch als *Nullvektoren*. Wir definieren außerdem Vektoren, welche in das Äußere des Lichtkegels zeigen als *raumartige* Vektoren v mit $v \cdot v < 0$ und solche die in das Innere des Lichtkegels zeigen als *zeitartige* Vektoren mit $v \cdot v > 0$. Zeitartige Vektoren kann man zusätzlich unterteilen in Vektoren, welche in die zeitartige Zukunft zeigen ($v^0 > 0$) und solche die in die zeitartige Vergangenheit zeigen ($v^0 < 0$).

Dass L^\uparrow_+ eine Gruppe ist, sieht man geometrisch. Eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in L$ bildet das Innere des Lichtkegels auf sich ab. Dabei bleiben die beiden Teilkegel (Zukunft und Vergangenheit) $V^\pm = \{x \mid x \cdot x > 0, \pm x^0 \geq 0\}$ entweder invariant oder werden vertauscht. Entscheidend dafür ist das Vorzeichen $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$, da $[\Lambda(1, \mathbf{0})]^0 = \Lambda^0_0$. Somit sind $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ und natürlich auch $\det \Lambda$ multiplikativ⁵ unter der Gruppenmultiplikation. Die orthochronen Transformationen bilden damit die Zukunft auf die Zukunft und die Vergangenheit auf die Vergangenheit ab.

⁴Die Inverse von Λ erhält man durch Multiplikation von rechts mit $\Lambda^{-1}\eta$ als $\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^t\eta$.

⁵Dies folgt aus der allgemeinen Relation $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für beliebige quadratische Matrizen A und B .

Auf Grund der Multiplizität von $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ und $\det \Lambda$ kann jedes $\Lambda \in L$ als das Produkt eines Elements der eigentlich-orthochronen Lorentz-Gruppe L_+^\uparrow mit einer Spiegelung $\{I_4, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}$ geschrieben werden. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf die eigentlich-orthochrone Untergruppe.

2.2.1 Eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe

Die 4×4 -Matrix Λ hat insgesamt 16 reelle Einträge. Die Gleichung (2.6) liefert 10 unabhängige Gleichungen.⁶ Daher werden Elemente $\Lambda \in L_+^\uparrow$ durch 6 reelle Parameter bestimmt.

Drei der Parameter können wir mit den dreidimensionalen Rotationen identifizieren. In der Tat gilt mit

$$\Lambda(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \quad (2.9)$$

sofort $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ wobei $R \in SO(3)$ mit $R^t R = I_3$. Damit bilden die Rotationen $\Lambda(R)$ eine Untergruppe von L_+^\uparrow .

Von größerem Interesse sind die verbleibende drei-parametrischen Transformationen, von denen wir erwarten, dass sie gegeneinander bewegte Bezugssysteme verknüpfen. Dazu untersuchen wir, ob spezielle Lösungen mit der Blockform

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

existieren, d. h. x^2, x^3 werden nicht transformiert. Einsetzen in (2.6) liefert die Bedingungen

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad b^2 - d^2 = -1.$$

Da wir nur an Lösungen aus L_+^\uparrow interessiert sind, fordern wir zudem $a > 0$ und $ad - bc = 1$.

Die erste Gleichung können wir erfüllen, indem wir den Parameter χ mit $a = \cosh \chi$ und $c = -\sinh \chi$ einführen. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $b = cd/a$. Einsetzen in $ad - bc = 1$ liefert $1 = d/a$, d. h. $d = \cosh \chi$ und $b = -\sinh \chi$. Damit erhalten wir die speziellen Lorentz-Transformationen

⁶Transponieren von (2.6) führt auf dasselbe Gleichungssystem. Daher sind nur 10 von den 16 Gleichungen unabhängig.

(Boosts)

$$\Lambda(\chi) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \exp \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\chi & \\ -\chi & 0 & 0_2 \\ \hline & & 0_2 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Aus der letzten Identität folgt sofort, dass die Boosts eine Untergruppe bilden mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(\chi_1 + \chi_2) = \Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2). \quad (2.12)$$

Daraus lässt sich direkt folgern, dass $\Lambda(\chi)^{-1} = \Lambda(-\chi)$.

Als nächstes wollen wir die physikalische Bedeutung von $\Lambda(\chi)$ erläutern. Dafür schreiben wir das Transformationsgesetz $x = \Lambda(\chi)^{-1}x'$ eines Boosts in Komponenten

$$\begin{aligned} ct &= (\cosh \chi)ct' + (\sinh \chi)r'_1, & r_2 &= r'_2, \\ r_1 &= (\sinh \chi)ct' + (\cosh \chi)r'_1, & r_3 &= r'_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ein Objekt, welches im S' -System am Ort $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t')$ ruht, bewegt sich daher im System S mit der Geschwindigkeit ⁷

$$w = \frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dr_1}{dt'} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = c \tanh \chi \quad (2.14)$$

Damit erhalten wir die Interpretation, dass $\Lambda(\chi)$ auf ein neues Inertialsystem transformiert, welches sich mit der Geschwindigkeit w entlang der x -Achse relativ zu S bewegt, siehe Abb. 1.1. Durch einfache hyperbolische Beziehungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \cosh \chi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \\ \sinh \chi &= \tanh \chi \cosh \chi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit $\beta = w/c$. Aus (2.13) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - wx^1/c^2), & x'^2 &= x^2, \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - wt), & x'^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für $\beta \rightarrow 0$ erhalten wir als Grenzwert die Galilei-Transformation

$$t' = t, \quad x'^1 = x^1 - wt, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

⁷In der Literatur wird $\chi = \operatorname{artanh}(w/c)$ als Rapidität bezeichnet.

Eine Transformation in ein System S' , was sich mit einer Geschwindigkeit \mathbf{w} in eine beliebige Raumrichtung gegen S bewegt, kann man grundsätzlich durch eine Verkettung einer Rotation (so dass \mathbf{w}' entlang der x -Richtung ist), eines Boosts und einer Rückrotation erhalten. Viel einfacher ist allerdings die Idee, dass man den Vektor \mathbf{r} in eine Komponente \mathbf{r}_{\parallel} entlang \mathbf{w} und einer Komponente \mathbf{r}_{\perp} orthogonal dazu aufspalten kann. Analog zu (2.16) erhält man dann

$$t' = \gamma[t - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_{\parallel})/c^2], \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{w}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}. \quad (2.17)$$

Da $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}/w^2$ und $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$ gilt, kann man einen allgemeinen Boost $x' = \Lambda(\mathbf{w})x$ schreiben als

$$\Lambda(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\mathbf{w}^t/c \\ -\gamma\mathbf{w}/c & I_3 + (\gamma - 1)\mathbf{w}\mathbf{w}^t/w^2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

oder in anderen Worten

$$\begin{aligned} t' &= \gamma[t - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})/c^2], \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{w^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} - \gamma\mathbf{w}t. \end{aligned}$$

Damit hängt ein Boost im Allgemeinen von den drei reellen Parametern \mathbf{w} ab. Es gilt $\Lambda(\mathbf{w}) = \Lambda(R_{\mathbf{w}})\Lambda(\chi)\Lambda(R_{\mathbf{w}}^t)$ mit der Rotation $R_{\mathbf{w}}$ definiert durch $\mathbf{w} = R_{\mathbf{w}}(w, 0, 0)^t$.

Die Lorentz-Transformationen werden für $w \rightarrow c$ singularär. Die Lichtgeschwindigkeit stellt eine Maximalgeschwindigkeit dar. Kein Objekt (und auch keine Information) kann sich schneller als Licht bewegen.

2.3 Struktur der Poincaré-Gruppe

Die Gruppe der affinen Lorentz-Transformationen wird die Poincaré-Gruppe genannt. Nach diesen Vorüberlegungen wissen wir, dass eine allgemeines Element der Poincaré Gruppe die folgende Form hat

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\mathbf{w}, R)x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (2.19)$$

Wie die Galilei Gruppe hat die Poincaré Gruppe 10 Parameter. Vier Parameter für die Translation mit a und die 6 Parameter der Lorentz-Gruppe (3 für Rotationen R und 3 für Boosts \mathbf{w}).

In der Tat kann man jede Lorentz-Transformation Λ als Produkt einer Rotation und eines allgemeinen Boosts schreiben mit $\Lambda(\mathbf{w}, R) = \Lambda(R)\Lambda(\mathbf{w}) = \Lambda(R_2)\Lambda(\chi)\Lambda(R_1)$ mit $R_1 = R_{\mathbf{w}}^t$ und $R_2 = RR_{\mathbf{w}}$. Man kann sich einfach klar machen, dass diese Zerlegung für jede Lorentz-Transformation

$x' = \Lambda x$ möglich ist. Betrachtet man nämlich den linearen Unterraum $M = \{x \mid x^0 = x'^0 = 0\}$ sieht man, dass man die zwei Möglichkeiten $\dim M = 2$ oder $\dim M = 3$ hat.⁸

Für den Fall, dass $\dim M = 3$ wird sowohl M als auch das orthogonale Komplement $M^\perp = \{x \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\}$ auf sich selbst abgebildet. Damit hat Λ direkt die Blockform (2.9) und beschreibt eine reine Rotation mit $\mathbf{w} = 0$.

Im Falle, dass $\dim M = 2$ wählen wir zwei orthonormierte Ortsvektoren $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in M$. Durch eine passende Drehung R_1 im Ortsraum $\{x^0 = 0\} \supset M$ können wir erreichen, dass $R_1 \mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$ und $R_1 \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1)$, d. h. sie stimmen mit den entsprechenden Richtungsvektoren im System S überein. Betrachten wir nun die Bildvektoren $\mathbf{f}'_2 = \Lambda \mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}'_3 = \Lambda \mathbf{f}_3$, welche auf Grund der Definition von M wieder Ortsvektoren sind. Analog zu oben können wir mit einer Rotation R_2 erreichen, dass $\mathbf{f}'_2 = R_2(0, 1, 0)$ und $\mathbf{f}'_3 = R_2(0, 0, 1)$ ist.

Definieren wir nun $\Lambda' = \Lambda(R_2^t) \Lambda \Lambda(R_1^t)$, dann haben wir nach Konstruktion, dass die Vektoren $x \in N$ mit $N = \{x \mid x^0 = x^1 = 0\}$ unter Λ' auf sich selbst abgebildet werden. Zudem wird $N^\perp = \{x^2 = x^3 = 0\}$ als Menge unter Λ' invariant gelassen. Deshalb muss Λ' die Blockform (2.11) eines Boosts haben.

2.4 Addition von Geschwindigkeiten

Es ist unmittelbar klar, dass die galileische Geschwindigkeitsaddition $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'$ zu Widersprüchen mit der Absolutheit der Lichtgeschwindigkeit führt. Diese verlangt nämlich, dass mit $v = c$ auch $v' = c$ ist, unabhängig von \mathbf{w} . Die relativistischen Formeln für die Geschwindigkeitsaddition lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen (2.17) für einen allgemeinen Boost herleiten. Wir betrachten zwei (achsen-parallele) Bezugssysteme S und S' , dessen Koordinaten durch (2.17) verknüpft sind (d. h. sie bewegen sich mit \mathbf{w} relativ zueinander). Betrachten wir ein Objekt, welches sich auf der Bahn $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'t'$ in S' bewegt. Dasselbe Objekt wird sich im System S auf der Bahn $\mathbf{r}(t)$ bewegen. In 4er Notation haben wir die Koordinaten $x(t) = [ct, \mathbf{r}(t)]$ und $x(t') = [ct', \mathbf{r}'(t')]$, welche durch $x = \Lambda(\mathbf{w})^{-1}x' = \Lambda(-\mathbf{w})x'$ verknüpft sind. Mit der allgemeinen Formel für einen Boost, erhalten wir

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma[1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2]$$

⁸Das Bild ΛB_0 von $B_0 = \{x \mid x^0 = 0\}$ ist drei-dimensional, da Λ invertierbar ist. Schneidet man diese Menge mit dem drei-dimensionalen Unterraum $B_0 = \{x' \mid x' = 0\}$ erhält der Schnittmenge $M = (\Lambda B_0) \cap B_0$ mit Dimension $\dim M$. Da $\dim(\Lambda B_0) = \dim B_0 = 3$ folgt sofort $\dim M \leq 3$. Aus $\dim M + \dim[(\Lambda B_0) + B_0] = \dim(\Lambda B_0) + \dim B_0 = 6$ folgt mit $\dim[(\Lambda B_0) + B_0] \leq 4$ sofort, dass $\dim M \geq 2$. Hier bezeichnet $V + W$ die Summe der Vektorräume V und W .

und

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{v}' + \frac{\gamma - 1}{w^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} + \gamma \mathbf{w}.$$

Das Objekt bewegt sich daher im System S mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\gamma^{-1}}{1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2} \left[\gamma \mathbf{w} + \frac{\gamma - 1}{w^2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} + \mathbf{v}' \right]. \quad (2.20)$$

Spaltet man die Geschwindigkeit \mathbf{v}' in seine Komponenten parallel (\mathbf{v}'_{\parallel}) und senkrecht (\mathbf{v}'_{\perp}) zu \mathbf{w} auf, erhält man die kompakte Form

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}')/c^2}. \quad (2.21)$$

des relativistischen Additionsgesetzes der Geschwindigkeiten. Den inversen Zusammenhang erhält man, indem man \mathbf{w} durch $-\mathbf{w}$ ersetzt.

Im Grenzfall, dass $w, v' \ll c$ erhält man die nichtrelativistischen Formel $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}'$. Falls \mathbf{v}' und \mathbf{w} parallel sind ($\mathbf{v}'_{\perp} = 0$), ergibt sich die vereinfachte Formel $\mathbf{v} = (\mathbf{w} + \mathbf{v}')/[1 + wv'/c^2]$. In der Tat kann man diese auch sofort aus (2.12) mit der hyperbolischen Additionsformel $\tanh(\chi_1 + \chi_2) = (\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2)/(1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2)$ erhalten. Für den Fall, dass \mathbf{v} orthogonal auf \mathbf{w} liegt, addieren sich die Geschwindigkeiten fast normal mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}' \sqrt{1 - \beta^2}$, wobei der zusätzliche Faktor γ^{-1} auf Grund der Zeitdilatation des Bezugssystems S' relativ zu S auftritt.

Es ist Instrukтив die Geschwindigkeitsaddition auch in Polarkoordinaten herzuleiten. Beschreibt man die Geschwindigkeit \mathbf{v} im Bezugssystem S durch den Absolutbetrag v und den Winkel θ via $\cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}/vw$ mit der relativen Geschwindigkeit der Bezugssysteme und führt analog v', θ' im Bezugssystem S' für \mathbf{v}' ein, lässt sich die Additionsformel (2.21) umschreiben als

$$v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\sqrt{w^2 + v'^2 + 2wv' \cos \theta' - w^2 v'^2 \sin^2 \theta' / c^2}}{1 + wv' \cos \theta' / c^2} \quad (2.22)$$

und

$$\tan \theta = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} v' \sin \theta'}{w + v' \cos \theta'}. \quad (2.23)$$

Aus (2.22) folgt sofort, dass mit $w, v' \leq c$ auch $v \leq c$ gilt. Damit spielt die Lichtgeschwindigkeit die Rolle einer Grenzgeschwindigkeit, die nicht überschritten werden kann.

Betrachten wir im Folgenden den Fall eines Lichtteilchens mit $v' = c$ genauer. Es gilt mit $v' = c$ auch $v = c$ unabhängig von $w \leq c$ und θ' , was genau

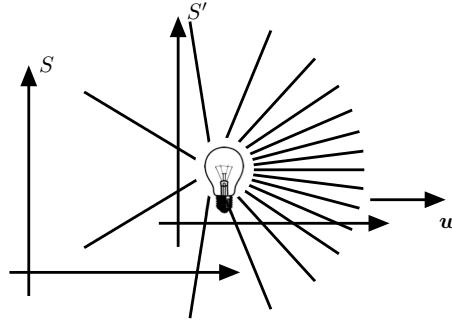


Abb. 2.2: Wir betrachten eine Lichtquelle, die im System S' ruht und dort Licht gleichförmig in alle Richtungen ausstrahlt. Wie in der Abbildung zu sehen, führt die relativistische Lichtabberation dazu, dass vom Bezugssystem S aus betrachtet mehr Licht in die Vorwärtsrichtung ausgesendet wird. Ein ähnlicher Effekt tritt auch in der nichtrelativistischen Physik auf, wenn man annimmt, dass das System S' bezüglich dem Äther ruht. Allerdings stimmen relativistischen und nichtrelativistischen Formeln nur bis erster Ordnung in β überein. Zudem ist die relativistische Formel (2.25) für die Abberation symmetrisch, so dass ein Beobachter im System S' denselben Effekt für eine Lichtquelle ruhend in S feststellt.

dem einsteinschen Postulat entspricht. Aus der Formel (2.23) erhält man in diesem Fall die relativistische Formel

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{\beta + \cos \theta'} \quad (2.24)$$

für die Lichtabberation. Wir wollen diese Formel ein wenig umschreiben, damit die Symmetrie $(\theta, \beta) \leftrightarrow (\theta', -\beta)$ offensichtlich wird. Aus (2.21) erhalten wir, dass $\text{sgn}(\cos \theta) = \text{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = \text{sgn}(\beta + \cos \theta')$. Damit wird das Vorzeichen von

$$\cos \theta = \pm(1 + \tan^2 \theta)^{-1/2} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}$$

festgelegt. Nimmt man diese zwei äquivalenten Gleichungen zusammen, erhält man die symmetrische Form

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta}{1 + 1/\cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta'}{2} \quad (2.25)$$

für die Lichtabberation, vgl. Abb. 2.2. Aus dieser Abberationsformel kann man die Transformationsformel für ein Raumwinkelelement einer Lichtquelle herleiten. Legt man die z -Achse in Richtung der relativen Bewegung der Bezugssysteme, gilt $d\Omega/d\Omega' = d(\cos \theta)/d(\cos \theta')$. Durch Differentiation der Gleichung $1 - \beta \cos \theta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta \cos \theta')$ folgt sofort

$$d\Omega = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} d\Omega'. \quad (2.26)$$

2.5 Minkowski-Diagramme

Minkowski- bzw. Raumzeit-Diagramme können dazu verwendet werden, Probleme in der Relativitätstheorie graphisch ohne analytische Rechnung zu lösen. Sie führen zu einer einfachen Anschauung, wie Raum und Zeit sich in der Relativitätstheorie zu einer Raum-Zeit verschmelzen. In Minkowski-Diagrammen verzichtet man auf die Darstellung von zwei der drei Raumdimensionen und führt alles auf die Darstellung der Zeit und einer Ortskoordinate (entweder r_1 oder r) an.

2.5.1 Relativistische Kausalität

In der newtonschen Mechanik ist die Kausalität durch die absolute Zeit definiert. Ein Ereignis A kann B dann und nur dann beeinflussen, wenn $t_B > t_A$ ist. In der Relativitätstheorie verliert der absolute Zeitbegriff seine Bedeutung. Zudem wird die Kausalität restriktiver, da nun c eine Maximalgeschwindigkeit für jegliche Wechselwirkung darstellt. In der Tat erfüllt die Bahn $x = (ct, \mathbf{r})$ eines Lichtpulses der bei $t = 0$ in $\mathbf{r} = 0$ ausgesendet wird

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - r^2(t) = 0. \quad (2.27)$$

Es ist einfach zu sehen, dass für Objekte, welche sich mit $v < c$ bewegen, $x \cdot x > 0$ gilt. Die Zukunft des Ereignisses $0 = (0, \mathbf{0})$ sind daher die Ereignisse mit $x \cdot x \geq 0$ und $x^0 \geq 0$. Die Vergangenheit sind dementsprechend Ereignisse mit $x \cdot x \geq 0$ und $x^0 \leq 0$; vgl. die Diskussion nach (2.8).

Die relativistische Kausalität verlangt, dass ein Ereignis A ein anderes Ereignis B nur dann beeinflussen kann, wenn B in der Zukunft von A liegt, d. h. $(x_B - x_A)^2 \geq 0$ und $x_B^0 \geq x_A^0$. Äquivalent kann ein Ereignis B von einem anderen Ereignis A nur dann beeinflusst werden, wenn A in der Vergangenheit von B liegt. Auf Grund der Tatsache, dass orthochrone Lorentz-Transformationen sowohl Δs^2 als auch das Vorzeichen von Δx^0 invariant lassen, stimmen alle Bezugssysteme über die Definition der Zukunft und Vergangenheit und damit der relativistischen Kausalität überein.

Ereignisse mit $x \cdot x < 0$ sind von 0 raumartig entfernt und stehen daher in überhaupt keinem kausalen Zusammenhang (weder Zukunft noch Vergangenheit). In der newtonschen Mechanik gibt es keine solche raumartigen Entfernungen, da alle Ereignisse entweder in der Zukunft oder der Vergangenheit liegen. Die möglichen kausalen Zusammenhänge können schön in einem Minkowski-Diagramm zusammengefasst werden siehe Abb. 2.3(a).

Da der Abstand Δs^2 Lorentz-invariant ist, stimmen alle Beobachter (in Inertialsystemen) über den kausalen Zusammenhang zweier Ereignisse überein.

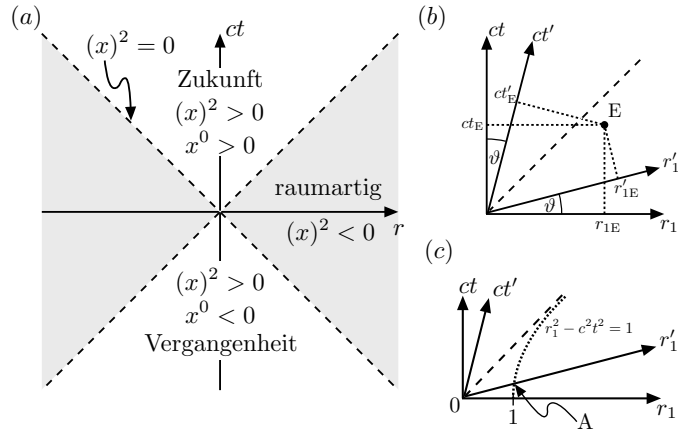


Abb. 2.3: (a) Klassifikation aller Ereignisse bezüglich einem Referenzereignis bei $0 = (0, \mathbf{0})$ in Zukunft, Vergangenheit und raumartig. (b) Ein Ereignis E wird in den zwei Koordinatensysteme S und S' , welche mit der Geschwindigkeit $w = \tan \vartheta c$ gegeneinander bewegt sind, durch die Koordinaten (ct_E, r_{1E}) bzw. (ct'_E, r'_{1E}) beschreiben. Die Koordinaten haben einen einfachen geometrischen Zusammenhang, welcher in der Abbildung gezeigt wird. (c) Geometrische Konstruktion mit der ausgehend von einer Längeneinheit im S -System, die Längeneinheit im bewegten S' -System festgelegt werden kann. Dazu konstruiert man den Schnittpunkt A der Einheitshyperbel $r_1^2 - c^2 t^2 = 1$ mit der r'_1 Achse. Die Länge \overline{OA} legt damit die Längeneinheit im S' -System fest.

2.5.2 Lorentz-Boosts

Es ist instruktiv sich zu überlegen, wie man einen Lorentz-Boost $\Lambda(\chi)$ in einem Minkowski-Diagramm dargestellt wird. Wie schon oben erwähnt, beschränken wir uns auf die Darstellung von Ereignissen mit $x^2 = x^3 = 0$. Damit werden Ereignisse nur noch durch ihre zweidimensional Raumzeitkoordinaten (t, r_1) bestimmt. Lorentz-Transformationen sind keine Drehungen der (ct, r_1) -Ebene, da sie nicht den euklidischen Abstand $c^2 t^2 + r_1^2$ sondern den Minkowski Abstand $c^2 t^2 - r_1^2$ invariant lassen. Man kann die Richtung der Koordinatenachsen des bewegten S' -Systems bezüglich des S -Systems einfach bestimmen. Die ct' -Achse ist bestimmt durch $0 = r'_1 = \gamma(r_1 - wt)$, d. h. $ct = (c/w)r_1$. Somit bildet die ct' -Achse mit der ct -Achse den Winkel ϑ mit

$$\tan \vartheta = \frac{w}{c}. \quad (2.28)$$

Wegen der Beziehung $|w| \leq c$ erhält man sofort, dass $|\vartheta| \leq \pi/4$ außerdem gilt $\tan \vartheta = \tanh \chi$. Analog erhält man, dass die Position der r'_1 -Achse bestimmt ist durch $0 = t' = \gamma(t - wr_1/c^2)$. Damit bildet die r'_1 -Achse mit der r_1 -Achsen auch den Winkel ϑ . Wie in Abb. 2.3(b) gezeigt, werden damit die Achsen

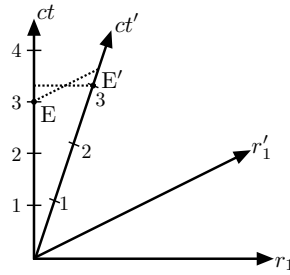


Abb. 2.4: Darstellung in einem Minkowski-Diagramm, dass zueinander bewegte Beobachter feststellen, dass die Uhr im jeweilig anderen Bezugssystem langsamer geht. Die Ereignisse E und E' finden im entsprechenden Bezugssystem jeweils um drei statt (d. h. eine ruhende Uhr zeigt 3). Der andere Beobachter ist bewegt und registriert, dass das Ereignis im anderen Bezugssystem nach 3 stattfindet. Die Situation ist daher vollkommen symmetrisch, da beide Beobachter feststellen, dass die Uhr im jeweils anderen Bezugssystem langsamer geht.

für $w > 0$ „zusammengeklappt“.

Nach Konstruktion bewegt sich ein Lichtstrahl immer entlang der Winkelhalbierenden in die positive t -Richtung. Um die korrekte Lorentz-Transformation zwischen den Bezugssystemen zu erhalten, müssen sich die Längeneinheiten auf den Achsen bei der Transformation ändern. Dazu können wir verwenden, dass eine Lorentz-Transformation den Abstand $c^2t^2 - r_1^2$ invariant lässt. Insbesondere gilt für alle Ereignisse, welche sich bei der Einheitslänge befinden, dass $r_1^2 - c^2t^2 = 1$. Wie in Abb. 2.3(c) ersichtlich, schneidet diese Einheitshyperbel die r_1' -Achse an dem Punkt A. Nach der Invarianz des Abstandes muss dieser Punkt bei $(0, 1)$ sein und damit ist die r_1' -Achse gegenüber der r_1 -Achse gestreckt. Den Streckungsfaktor kann man durch eine einfache Überlegung erhalten: alle Punkte auf der r_1' -Achse sind im S -System gegeben durch $\tan \vartheta = ct/r_1$. Der Schnittpunkt mit der Einheitshyperbel liegt demnach bei $(1 - \tan^2 \vartheta)r_1^2 = 1$, womit man die Einheitslänge

$$\overline{0A} = \sqrt{r_1^2 + c^2t^2} = \sqrt{(1 + \tan^2 \vartheta)r_1^2} = \sqrt{\frac{1 + w^2/c^2}{1 - w^2/c^2}} \quad (2.29)$$

auf der r_1' -Achse des S' -Systems erhält. Die Längeneinheiten des S' -Koordinatensystems muss daher um den Faktor $\overline{0A} \geq 1$ gestreckt gezeichnet werden, sowohl auf der r_1' -Achse als auch (auf Grund der Symmetrie) auf der ct' -Achse. Erst mit der Reskalierung des S' -Koordinatensystems wird die Koordinatentransformation, wie von der Speziellen Relativitätstheorie verlangt, symmetrisch. Zum Beispiel zeigt Abb. 2.4, dass jeder Beobachter feststellt, dass die Uhr im jeweilig anderen Bezugssystem langsamer geht.

Kapitel 3

Relativistische Mechanik

Wie wir im Kapitel 1 gesehen haben, ist die newtonsche Mechanik nicht mit dem Relativitätspostulat verträglich. In der speziellen Relativitätstheorie müssen wir daher die Gesetze der Mechanik kovariant bezüglich Lorentz-Transformationen machen. Da Vierertensoren ein festes Transformationsverhalten aufweisen, vgl. Anhang A, müssen die Gleichungen der neuen Mechanik Tensoren derselben Stufe gleichsetzen. Als Nebenbedingung sollte sich im Grenzfall $v \ll c$ die alte Mechanik wiederfinden.

3.1 Vierergeschwindigkeit

Die Bewegung eines Objektes wird durch die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}$ festgelegt. In relativistischer Schreibweise wird die Bahn zu einer Weltlinie

$$x^\mu(\lambda) = [ct, \mathbf{r}(t)] = [ct(\lambda), \mathbf{r}(\lambda)] \quad (3.1)$$

mit $\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}[t(\lambda)]$ und λ einem beliebigen Parameter, welcher die Weltlinie parameterisiert. Wie im Kapitel 2 erläutert, werden Transformationen zwischen verschiedenen Intertialsystemen von einer Lorentz-Transformation Λ mit $x' = \Lambda x$ geleistet. Daher ist x^μ ein kontravarianter Vierervektor.

Man möchte nun gerne den Begriff der Geschwindigkeit auf einen Vierervektor verallgemeinern. Um das zu erreichen, muss $x(\tau)$ nach einem Lorentz-Skalar abgeleitet werden, welcher im Grenzfall $v \ll c$ mit der Zeit übereinstimmt. Wie in (1.17) erläutert, bildet die Eigenzeit

$$\tau(t) = \int_0^t dt' \sqrt{1 - v(t')^2/c^2} = \int_{x(0)}^{x(t)} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} / c \quad (3.2)$$

gerade ein Lorentz-Skalar. In der Tat ergibt sich aus der Transformation

$x' = \Lambda x$ einer Weltlinie die Invarianz der Eigenzeit

$$\tau'(t') = \int_{x'(0)}^{x'(t')} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}} = \int_{x(0)}^{x(t)} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} = \tau(t).$$

Um die Parametrisierung in (3.1) Bezugssystem unabhängig zu machen, ist es sinnvoll $\lambda = \tau$ zu setzen. Die Ableitung der Weltlinie nach der Eigenzeit ergibt den kovarianten Vierervektor

$$u^{\mu}(\tau) = \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^{\mu}(t)}{dt} = \gamma(t)[c, \mathbf{v}(t)] \quad (3.3)$$

mit $\gamma(t) = [1 - v(t)^2/c^2]^{-1/2}$, welchen wir als Vierergeschwindigkeit bezeichnen. Aus dem Vierervektor u^{μ} kann man durch Kontraktion mit sich selbst einen Lorentz-Skalar erhalten. In der Tat gilt $u_{\mu}u^{\mu} = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$ und damit ist u immer auf c normiert und nur 3 Parameter sind unabhängig.

3.2 Energie-Impuls Beziehung

Mit der Vierergeschwindigkeit können wir unmittelbar den Impuls \mathbf{p} zu einem kovarianten Viererimpuls

$$p^{\mu} = (p^0, \mathbf{p}) = mu^{\mu} = \gamma m(c, \mathbf{v}) \quad (3.4)$$

verallgemeinern. Im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$, $\gamma \rightarrow 1$, stimmen die räumlichen Komponenten von p^{μ} mit dem nichtrelativistischen Impuls überein. Der räumliche Anteil bleibt daher für ein kräftefreies Teilchen in einem Inertialsystem erhalten. Da p^{μ} ein Vierervektor ist, bleibt daher der komplette Viererimpuls p^{μ} in jedem Inertialsystem erhalten. Analog kann man schließen, dass der Gesamtimpuls $P^{\mu} = \sum_{j=1}^N (p_j)^{\mu}$ von N Teilchen mit den Viererimpulsen p_j in jedem Inertialsystem erhalten bleibt.

Die Frage ist nun, welcher Erhaltungsgröße die Zeitkomponente p^0 in der nichtrelativistischen Physik entspricht. Entwickelt man p^0 nach v/c ergibt sich

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc + \frac{1}{2}mv^2/c + \dots \quad (3.5)$$

Man erkennt sofort, dass $p^0 c$ bis auf die Konstante mc^2 mit der kinetischen Energie E_{kin} der newtonschen Mechanik übereinstimmt. Dies veranlasst die Identifikation $E = p^0 c$, so dass

$$E = p^0 c = E_0 + E_{\text{kin}} \quad \text{mit} \quad E_0 = mc^2. \quad (3.6)$$

Die Ruheenergie $E_0 = mc^2$ ist gerade Einsteins berühmte Formel. Die relativistische Energie enthält im Gegensatz zur nichtrelativistischen Physik einen

Ruheenergiebeitrag, der nur von der Masse des Objektes abhängt. Anders als in der nichtrelativistischen Physik, kann Masse in der Relativitätstheorie vernichtet werden und die entsprechende Energie in andere Energieformen umgewandelt werden.

Betrachten wir als Beispiel den (symmetrischen) Zerfall eines Teilchens in zwei Teile. Im Ruhesystem des Teilchens hat man am Anfang den Viererimpuls $P^\mu = (Mc, \mathbf{0})$ mit M der Gesamtmasse des Teilchens. Nach dem symmetrischen Zerfall ist der Gesamtimpuls P^μ zusammengesetzt aus dem Impuls zweier Teilchen mit Masse m , welche sich mit der Geschwindigkeit $\pm \mathbf{v}$ bewegen. Die Teilchen haben den Viererimpulse $\gamma m(c, \pm \mathbf{v})$ mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, welche sich zum Gesamtimpuls $P^\mu = 2\gamma m(c, \mathbf{0})$ addieren. Aus der Erhaltung des Viererimpulses können wir nun folgern, dass

$$2m = M\sqrt{1 - v^2/c^2} < M, \quad (3.7)$$

d. h. die Gesamtmasse ist nicht erhalten. Die Ruheenergie des Massendefekts ist gerade gegeben durch

$$(M - 2m)c^2 = 2mc^2(\gamma - 1) = 2\frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (3.8)$$

und daher für $v \ll c$ gleich der nichtrelativistischen Energie der Zerfallsprodukte. Beim Zerfall des Teilchens wird daher Ruheenergie in kinetische Energie der Zerfallsprodukte umgewandelt.

Aus der Tatsache, dass die Länge von p^μ einen Lorentz-Skalar bildet, erhält man zudem die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$p_\mu p^\mu = (E/c)^2 - p^2 = m^2 c^2, \quad (3.9)$$

welche nach Konstruktion in allen Inertialsystemen gilt.

3.3 Bewegungsgleichung

Mit dieser Vorarbeit ist es nun möglich, die Mechanik lorentz-kovariant zu formulieren. Am einfachsten geschieht dies mit dem Lagrange Formalismus. In diesem Formalismus ordnet man jeder Weltlinie $x(\lambda)$ eine Wirkung

$$S[x(\lambda)] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda L(x, \partial_\lambda x, \lambda) \quad (3.10)$$

zu mit L der Lagrange-Funktion. Das hamiltonische Prinzip verlangt, dass die Bahn eines Teilchens durch ein Extremum der Wirkung mit $\delta S = 0$ charakterisiert ist. Dabei werden verschiedene Weltlinien mit festgehaltenen

Endpunkten $x(\lambda_0) = x_0$ und $x(\lambda_1) = x_1$ miteinander verglichen. Das Extremalprinzip führt daher mit partieller Integration auf

$$0 = \delta S = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left[(\partial_x L) \delta x + (\partial_{\partial_\lambda x} L) \partial_\lambda \delta x \right] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \left(\partial_x L - \frac{d}{d\lambda} \partial_{\partial_\lambda x} L \right) \delta x.$$

Da die Variation $\delta x(\lambda)$ mit $\delta x(\lambda_0) = \delta x(\lambda_1) = 0$ beliebig ist, folgt aus dem hamiltonschen Prinzip die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{d\lambda} \partial_{\partial_\lambda x} L = \partial_x L, \quad (3.11)$$

welche die Rolle der Bewegungsgleichung spielt. Aus der Bedingung δS an die Bahn ist direkt ersichtlich, dass die Bewegungsgleichung kovariant wird, solange die Wirkung S ein Lorentz-Skalar ist.¹

3.3.1 Kräftefreies Teilchen

In der nichtrelativistischen Mechanik wird ein kräftefreies Teilchen durch die Lagrange-Funktion $L_0 = \frac{1}{2}mv^2$ beschrieben. Für eine relativistische Verallgemeinerung der Bewegungsgleichungen eines kräftefreien Teilchens benötigen wir eine Wirkung, welche ein Lorentz-Skalar ist und im Grenzfall $v \ll c$ das nichtrelativistische Verhalten reproduziert. Wie wir in (3.2) gesehen haben, ordnet die Eigenzeit einer Weltlinie gerade ein Lorentz-Skalar zu. Ein natürlicher Ansatz ist daher $S_0 = -mc^2\tau$, wobei der Vorfaktor E_0 gerade so gewählt wurde, dass S_0 die Einheit einer Wirkung hat. In der Tat erhalten wir

$$S_0 = -mc^2\tau = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \int dt \left[-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right],$$

so dass die relativistische Lagrange-Funktion

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3.12)$$

im Grenzfall $v \ll c$ bis auf die Konstante mc^2 gerade mit der nichtrelativistischen Lagrange-Funktion eines kräftefreien Teilchens übereinstimmt. Die relativistischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (3.13)$$

erhält man als Euler-Lagrange-Gleichungen zu L_0 . In dieser Form ist es allerdings nicht direkt ersichtlich, dass die Gleichung (3.13) kovariant ist. Um die Kovarianz explizit zu machen, bemerken wir, dass wegen der Energie-Impuls

¹Im Prinzip können sich die Wirkungen in den verschiedenen Inertialsystemen auch um einen Faktor unterscheiden.

Beziehung (3.9) mit (3.13) auch \dot{p}^0 festgelegt wird. In der Tat erhalten wir durch Differentiation von (3.9) nach t

$$c \frac{dp^0}{dt} = c \frac{\mathbf{p}}{p^0} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \quad (3.14)$$

so dass wir die manifest-kovariante Gleichung $dp^\mu/d\tau = 0$ finden.

3.3.2 Teilchen in einem Potential

In der galileischen Physik betrachtet man oft ein Teilchen in einem skalaren Potential $V(\mathbf{r}, t)$. Das entsprechende Problem ist in der relativistischen Mechanik nicht wirklich zielführend. Das Problem ist, dass startend von einem skalaren Potential V , das Potential in einem anderen Bezugssystem automatisch auch von der Geschwindigkeit \mathbf{v} abhängig wird. Deshalb ist es besser direkt von einem Vektorpotential zu starten, das an die Geschwindigkeit koppelt. Ein weiterer Punkt ist, dass es gar keine physikalische Kraft gibt, welche durch ein skalares Potential beschrieben werden kann, da die Gravitationskraft nicht kovariant formuliert ist und daher nur die elektrodynamische Kraft in das relativistische Konzept passt. Die Elektrodynamik kommt direkt mit einem Skalar- $\varphi(\mathbf{r}, t)$ und einem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Die Wirkung der elektrodynamischen Felder auf ein Teilchen mit Ladung q wird in der klassischen Mechanik beschrieben durch die Lagrange-Funktion

$$L = L_0 + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\varphi. \quad (3.15)$$

Ersetzt man nun die freie Lagrange-Funktion $L_0 = mv^2/2$ durch die relativistische Verallgemeinerung (3.12), sieht man, dass die Wirkung

$$S = \int dt L = - \int d\tau \left(mc^2 + \frac{q}{c} u^\mu A_\mu \right) \quad (3.16)$$

schon kovariant ist, falls $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ wie ein Vierervektor transformiert.²

Für den Fall, dass $\mathbf{A} = 0$ in einem Bezugssystem, erhält man den Fall eines Teilchens in einem skalaren Potential $V(\mathbf{r}, t) = q\varphi(\mathbf{r}, t)$. In diesem Spezialfall hat die Euler-Lagrange Gleichung die Form

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.17)$$

mit $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ und $\mathbf{F} = -\nabla V$ der Kraft, welche auf das Teilchen wirkt. Die Bewegungsgleichung (3.17) wird oft in der Vierernotation

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (3.18)$$

²Wir werden im Kapitel 4 sehen, dass A^μ sich in der Elektrodynamik gerade wie ein Vierervektor transformiert

geschrieben, mit K^μ der Minkowski-Kraft. Die Raumkomponenten der Minkowski-Kraft ergeben sich direkt aus (3.17) als $\mathbf{K} = \gamma \mathbf{F}$, mit $\gamma d\tau = dt$. Die Zeitkomponente K^0 der Minkowski-Kraft wird aus der zusätzlichen Bedingung

$$K^\mu u_\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} u_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = 0 \quad (3.19)$$

bestimmt, d. h. die Viererbeschleunigung $du^\mu/d\tau \propto K^\mu$ steht immer senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit. Damit erhält man die komplette Minkowski-Kraft als³

$$K^\mu = \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c, \mathbf{F}). \quad (3.20)$$

Wie für das kräftefreie Teilchen ist die 0-Komponente von (3.18) ein Ausdruck der Energieerhaltung. In der Tat erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dp^0}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.21)$$

Damit entspricht $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ der Leistung, welche die äußere Kraft \mathbf{F} am Teilchen leistet und $E = cp^0$ ist (bis auf die Konstante mc^2) die kinetischen Energie des Teilchens.

Wir wollen nun im allgemeinen Fall mit $\mathbf{A} \neq 0$ aus L die Euler-Lagrange Gleichungen herleiten. Dafür brauchen wir die einfach zu beweisende Zwischenresultate

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r_k} &= -q \frac{\partial \varphi}{\partial r_k} + \frac{q}{c} \sum_{l=1}^3 v_l \frac{\partial A_l}{\partial r_k}, & \frac{L}{\partial \dot{r}_k} &= \frac{mv_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{q}{c} A_k \\ \frac{d}{dt} \frac{L}{\partial \dot{r}_k} &= \frac{dp_k}{dt} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial r_l} v_l \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r_k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \sum_{l=1}^3 v_l \left(\frac{\partial A_l}{\partial r_k} - \frac{\partial A_k}{\partial r_l} \right) \\ &= qE_k + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_k \end{aligned} \quad (3.22)$$

eines Teilchens auf das die Lorentz-Kraft $\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c$ im elektrischen Feld $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A}/c$ und magnetischen Feld $\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{A}$ wirkt.

Beachten Sie, dass in Anwesenheit eines Vektorpotential der kanonische Impuls $\mathbf{p}_{\text{kan}} = \partial_v L = \mathbf{p} + q\mathbf{A}/c$ nicht mit dem kinematischen Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ übereinstimmt. Insbesondere bezieht sich die Energie-Impuls Beziehung (3.9) auf den kinematischen und nicht auf den kanonischen Impuls.

³Ausgeschrieben in Komponenten ergibt (3.19) $K^\mu u_\mu = \gamma c K^0 - \gamma \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \gamma c K^0 - \gamma^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$, was man einfach nach K^0 auflösen kann.

Man kann die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld auch in eine explizit kovariante Form bringen. Dafür definiert man den (zweifach-kovarianten) elektromagnetischen Feldstärketensor (Faraday-Tensor) als

$$F_{\mu\nu} = (dA)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (3.23)$$

Der Tensor $F_{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch und hat daher 6 unabhängige Komponenten. Durch explizites nachrechnen erhält man, dass die Komponenten⁴

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

direkt durch das elektrische und das magnetische Feld gegeben sind. Die Bewegungsgleichung lässt sich damit kovariant in der Form von (3.18) schreiben, wobei die Lorentz-Kraft zu der manifest-kovarianten Minkowskikraft

$$K_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu = (q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c, -\mathbf{F}_L) \quad (3.25)$$

wird. Aus der Antisymmetrie von F erhält man direkt, dass die Nebenbedingung $K_\mu u^\mu = 0$ erfüllt ist, vgl. Gl. (3.19).

Teilchen in einem homogenem elektrischem Feld

Die Form der Bewegungsgleichung (3.18) stellt sicher, dass auch bei konstant wirkender Kraft, die Lichtgeschwindigkeit nie überschritten wird. Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen mit Masse m , das einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$ ausgesetzt ist. Es sei $\mathbf{v}(0) = 0$, so dass die Bewegung nur in die x -Richtung verläuft. Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{v_1(t)}{\sqrt{1 - v_1(t)^2/c^2}} = c \frac{d \sinh \chi(t)}{dt} = \frac{qE_0}{m} = a \quad (3.26)$$

mit der Rapidität χ definiert durch $v_1 = c \tanh \chi$. Die Lösung ist daher gegeben durch $\sinh \chi = at/c$, was

$$v_1(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} = \begin{cases} at, & |t| \ll c/a, \\ c, & |t| \gg c/a \end{cases} \quad (3.27)$$

entspricht. Obwohl die Geschwindigkeit bei c saturiert, nimmt die Energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_1(t)^2/c^2}} = mc^2 \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (3.28)$$

⁴Im Allgemeinen enthält ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe in der Minkowski-Raumzeit gerade einen Polarvektor \mathbf{E} und einen Axialvektor \mathbf{B} .

immer weiter zu. Dasselbe gilt wegen $E^2 - p_1^2 c^2 = m^2 c^4$ für den relativistischen Impuls.

Es ist auch aufschlussreich, die Weltlinie eines Objektes, das eine konstante Beschleunigung erfährt zu berechnen. Die Bahn eines Raumschiffes, das sich mit einer konstanten Beschleunigung bewegt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \int_0^t dt' v_1(t') = \frac{c^2}{a} \int d\chi \sinh \chi = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + (at/c)^2} \\ &= \text{konst.} + \frac{at^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Damit ist die Bahn des Raumschiffes einfach einer Hyperbel während in der newtonschen Mechanik die Bahn eine Parabel ist. Eine wichtige Größe ist die Eigenzeit

$$\tau(t) = \int_0^t dt' \sqrt{1 - v_1(t')^2/c^2} = \frac{c}{a} \int d\chi = \frac{c \operatorname{arsinh}(at/c)}{a}, \quad (3.30)$$

welche die Zeit im lokalen Bezugssystem des Raumschiffes misst.⁵

Mit der Hyperbelbahn des konstant beschleunigten Raumschiffes lässt sich das Zwillingsparadoxon auflösen: am Anfangszeitpunkt $t_0 = -T/2$ befindet sich das Raumschiff am Ort $x_0 = r_1(-T/2)$. Stellen wir uns nun vor, dass einer der Zwillinge in das Raumschiff einsteigt während der andere ruhend am Ort x_0 verbleibt. Am Zeitpunkt $t_1 = T/2$ befindet sich das Raumschiff dann wieder am selben Ort $x_0 = r_1(T/2)$. Für den ruhenden Zwilling ist dazwischen die Zeit T vergangen. Der andere Zwilling dagegen misst die Eigenzeit (3.30) im Raumschiff. Für ihn ist daher die kürzere Zeit

$$\tau(T/2) - \tau(-T/2) = \frac{2c \operatorname{arsinh}(aT/2c)}{a} < T \quad (3.31)$$

vergangen. Damit ist bei erneuten Zusammentreffen am Ort x_0 der beschleunigte Zwilling jünger als der ruhende. Alle Beobachter werden mit dieser Aussage übereinstimmen. Anders als bei der Zeitdilatation zwischen zwei Inertialsystemen, siehe Abb. 2.4, ist die Situation hier aber nicht symmetrisch, da nur einer der Zwillinge beschleunigt wurde.

Teilchen in einem homogenem magnetischem Feld

Als zweites Beispiel wollen wir nun den Fall eines Teilchens in einem homogenen magnetischen Feld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ anschauen. Es sei die Anfangsbedingung $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ so dass die Bewegung nur in der xy -Ebene verläuft.

⁵Ausgedrückt durch die Eigenzeit, hat die Bahn des Raumschiffes die einfache Form $r_1(\tau) = (c^2/a) \cosh(c\tau/a)$.

Die Bewegungsgleichung hat die allgemeine Form

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.32)$$

Da $E/mc^2 = \gamma$ gilt und ein Magnetfeld keine Arbeit leistet, bleibt γ erhalten. Setzen wir die Beziehung $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ in (3.32) ein und schreiben die Gleichung in Komponenten, erhalten wir

$$\dot{v}_1 = \omega v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega v_1 \quad (3.33)$$

mit der Larmorfrequenz $\omega = qB_0/mc\gamma$. Die Gleichungen werden gelöst durch

$$v_1(t) = v_0 \cos(\omega t), \quad v_2(t) = -v_0 \sin(\omega t). \quad (3.34)$$

Eine weitere Integration führt auf die Bahnkurve

$$r_1(t) = \rho \sin(\omega t), \quad r_2 = \rho \cos(\omega t). \quad (3.35)$$

Wir erkennen, dass sich das Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius $\rho = v_0/\omega = qv_0B_0/mc\gamma$ bewegt.

Wegen der Konstanz von γ ist die Eigenzeit einfach gegeben durch $\tau = t/\gamma$. Ein Beobachter, welcher sich auf der Kreisbahn bewegt wird daher feststellen, dass er die Eigenzeit $2\pi/\omega\gamma$ für eine Umlauf braucht. Auch hier gibt es keine Symmetrie zwischen den zwei Bezugssystemen, so dass alle Beobachter übereinstimmen, dass die Rotationsgeschwindigkeit gemessen vom beschleunigten Bezugssystem größer ist als im Laborsystem.

3.4 Drehimpuls

In einem geschlossenen System gilt neben der Energie- und Impulserhaltung, welche sich in der Relativitätstheorie in der Erhaltung des Viererimpulses p^μ wiederfindet, in der newtonschen Mechanik auch die Erhaltung des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$. Die Drehimpulserhaltung hat ihren Ursprung in der Isotropie der physikalischen Gesetze.

Es zeigt sich, dass die relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses auf den antisymmetrischen Drehimpulstensor⁶

$$L^{\mu\nu} = (x \wedge p)^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -cN^1 & -cN^2 & -cN^3 \\ cN^1 & 0 & L_3 & -L_2 \\ cN^2 & -L_3 & 0 & L_1 \\ cN^3 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

⁶Dass \mathbf{L} in der newtonschen Mechanik als Vektor aufgefasst werden kann, ist dem speziellen Status des Vektorproduktes in drei Dimensionen geschuldet. Im Allgemeinen ist $L = x \wedge p$ durch das äußere Produkt von x und p gegeben. Daher ist $L^{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe mit sechs unabhängigen Komponenten in der vierdimensionalen Raumzeit.

führt, vgl. (3.24). Hier haben wir den neuen Vektor $\mathbf{N} = m\gamma\mathbf{r} - \mathbf{p}t$ eingeführt, welcher auch das dynamische Massenmoment genannt wird.

Betrachten wir nun N Teilchen, welche sich in einem abgeschlossenen System befinden. Wie im Kapitel 3.2 am Beispiel des Viererimpulses schon gesehen haben, ist die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j$ nur dann kovariant, wenn der komplette Drehimpulstensor $L^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^N (L_j)^{\mu\nu}$ erhalten bleibt. Damit muss auch das Massenmoment $\mathbf{N} = \sum_{j=1}^N \mathbf{N}_j$ erhalten bleiben. Man kann diese Erhaltungsgröße auf eine intuitivere Form bringen, indem man bemerkt, dass wir den Zeitdilationsfaktor γ_j des j -ten Teilchens ausdrücken können als $\gamma_j = E_j/m_j c^2$. Da auch die Gesamtenergie $cP^0 = \sum_{j=1}^N E_j$ erhalten bleibt, lässt sich die Erhaltung des dynamische Massenmoments umschreiben als

$$\frac{\mathbf{N}}{\sum_{j=1}^N E_j} = \frac{\sum_{j=1}^N (E_j \mathbf{r} - c^2 \mathbf{p}_j t)}{\sum_{j=1}^N E_j} = \mathbf{R} - \mathbf{V}t = \text{konst.} \quad (3.37)$$

Damit sehen wir, dass sich der ‘‘mittlere’’ Ortsvektor

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{j=1}^N E_j \mathbf{r}}{\sum_{j=1}^N E_j} \quad (3.38)$$

gleichmäßig mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j}{\sum_{j=1}^N E_j} \quad (3.39)$$

bewegt. Die Gleichung (3.38) liefert eine Erweiterung des Schwerpunktsbegriffes in den relativistischen Kontext. In der Tat gilt im Grenzfall, dass alle Geschwindigkeiten klein sind, dass $E_j \approx m_j c^2$. Damit erhalten wir den klassischen Ausdruck $\mathbf{R} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j / \sum_{j=1}^N m_j$. Es gilt allerdings zu beachten, dass \mathbf{R} gerade nicht wie die Raumkomponenten eines Vierervektors transformiert. Damit hängt der Schwerpunkt auch vom Beobachter ab und ist nicht einfach relativ zu den Teilchen festgelegt.

Kapitel 4

Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die Maxwell-Gleichungen schon dem einsteinschen Relativitätsprinzip genügen. Dies ist keine Überraschung, da das Prinzip auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeiten in allen Inertialsystemen beruht; eine Tatsache, welche in den Maxwell-Gleichungen schon berücksichtigt ist. Wir werden eine manifest kovariante Formulierung des Elektromagnetismus kennenlernen und feststellen, dass die Maxwell-Gleichungen keiner Korrektur bedarf. In der Tat ist die Spezielle Relativitätstheorie dazu da die Mechanik mit der maxwellschen Theorie kompatibel zu machen, ohne letztere zu verändern.

4.1 Invarianten des Feldes

Aus dem Farady-Tensor $F_{\mu\nu}$ lassen sich Invarianten (Skalare) bilden, welche sich beim Übergang zu anderen Inertialsystemen nicht ändern. Diese sind wichtig, da man damit eine skalare Wirkung bekommt, deren Euler-Lagrange-Gleichungen kovariant sind. Es ist klar, dass sich aus $F_{\mu\nu}$ sich der Skalar

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = B^2 - E^2 \quad (4.1)$$

und der Pseudoskalar¹

$$-\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\mu\nu}F_{\sigma\tau} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (4.2)$$

¹Wir führen hier den total antisymmetrischen (Levi-Civita) Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ ein. Der Levi-Civita Tensor ist ein (invarianter) Pseudotensor, denn es gilt $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\tau \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \det(\Lambda) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

bilden lassen. Der pseudoskalare Charakter von $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ ist sofort klar, da es ein Produkt eines polaren (\mathbf{E}) und eines axialen (\mathbf{B}) Vektors ist.

Durch die Invarianz von $E^2 - B^2$ erhält man sofort, dass falls $E > B$ in einem Bezugssystem auch $E' > B'$ in jedem anderen Inertialsystem gilt. Ebenso erhält man aus der Invarianz von $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, dass Beobachter in allen Inertialsystemen damit übereinstimmen, ob \mathbf{E} und \mathbf{B} einen stumpfen (spitzen) Winkel bilden.

4.2 Homogene Gleichungen

Die homogenen Maxwell-Gleichungen koppeln nicht an Ladungen. Ihre Aussage ist, dass man zur Beschreibung der Physik der elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} auf die Potentiale φ und \mathbf{A} übergehen kann. In der Tat folgen die homogenen Maxwell-Gleichungen direkt aus der Existenz des Potentials A^μ . Mit $F_{\mu\nu} = \partial A_\mu / \partial x^\nu - \partial A_\nu / \partial x^\mu$ können wir durch einfaches Nachrechnen überprüfen, dass²

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\mu} = 0; \quad (4.3)$$

hier haben wir den dualen Feldstärketensor $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$ eingeführt, dessen Divergenz nach (4.3) verschwindet. Der duale Feldstärketensor hat die Komponenten

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Man erhält ihn aus $F^{\mu\nu}$ durch die Ersetzung $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$. Damit führt die Bedingung der Verschwindenden Divergenz von \mathcal{F} führt auf die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu 0}}{\partial x^\mu} \mapsto \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{\mu j}}{\partial x^\mu} \mapsto -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} - \nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (4.5)$$

4.3 Wirkung des elektromagnetischen Feldes

Die Gesamtwirkung des elektromagnetischen Feldes mit N geladenen Teilchen lässt sich aus den Bestandteilen $S = S_f + S_m + S_{mf}$ zusammensetzen.

²Zum Beispiel gilt $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial^2 A_\sigma / (\partial x^\tau \partial x^\mu) = 0$, da ε antisymmetrisch in $\tau \leftrightarrow \mu$, während der Rest symmetrisch ist. Gleiches gilt auch für den zweiten Term.

Der Anteil S_m ist die freie Wirkung der Teilchen und mit Kapitel 3.3.1 gegeben durch

$$S_m = - \sum_{j=1}^N m_j c^2 \int d\tau_j. \quad (4.6)$$

Die Wechselwirkung der Teilchen mit dem elektromagnetischen Feldes über die Lorentz-Kraft wird durch S_{mf} beschrieben. Nach Kapitel 3.3.2 wird dieser Anteil beschrieben durch

$$S_{mf} = - \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{c} \int d\tau_j A_\mu(x_j) u_j^\mu \quad (4.7)$$

mit der Ladung q_j des j -ten Teilchens, welche die Rolle der Wechselwirkungskonstanten spielt.

Den letzte Summanden S_f haben wir bis jetzt nicht kennengelernt. Er beschreibt die intrinsische Dynamik der Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} bzw. $F_{\mu\nu}$. Im Allgemeinen folgen Feldgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen einer Lagrangedichte \mathcal{L}_f . Aus der Lagrangedichte erhält man durch Integration über den Raum die Lagrange Funktion $L_f = \int d^3r \mathcal{L}_f$. Nach einer weiteren Integration über die Zeit erhalten wir dann die Wirkung $S_f = \int dt L_f = \int d\Omega \mathcal{L}_f$, wobei wir das Maß $d\Omega = dt d^3r$ in der Raumzeit eingeführt haben. Mit der allgemeinen Transformationssatz für Integrale erhält man, dass das Maß ein Lorentz-Skalar ist. In der Tat führt ein Variabelwechsel $x' = \Lambda x$ auf $d\Omega' = |\det \Lambda| d\Omega$ mit $\det \Lambda = \pm 1$ der Funktionaldeterminanten. Die Eigenschaft, dass S_f ein Skalar sein muss, ist daher äquivalent dazu, dass die Lagrangedichte \mathcal{L}_f ein Lorentz-Skalar ist.

Wir wissen, dass die Maxwell-Gleichungen für die elektromagnetischen Felder linear sein müssen, damit sie dem Superpositionsprinzip genügen. Daher muss \mathcal{L}_f quadratisch in $F_{\mu\nu}$ sein. Da zudem die Maxwell-Gleichungen erster Ordnung in Zeit und Ort sind, dürfen in \mathcal{L}_f keine Ableitungen von $F_{\mu\nu}$ vorkommen. Den einzige Skalar, der diesen Anforderungen genügt, haben wir in (4.1) kennengelernt. Wir setzten daher

$$S_f = - \frac{1}{16\pi} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \int d\Omega (E^2 - B^2), \quad (4.8)$$

wobei der Vorfaktor so gewählt wurde, dass wir als Euler-Lagrange-Gleichungen die Maxwell-Gleichungen im gaußschen Einheitensystem erhalten.

Es ist oft hilfreich, auch die Materie durch Felder auszudrücken. Dazu geht man von den Teilchen mit den Koordinaten $\mathbf{r}_j(t)$ über auf die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (4.9)$$

welche man meistens als kontinuierliche Funktion der Ortskoordinate \mathbf{r} auffasst. Obwohl die Ladung q_j ein Skalar ist, gilt gleiches wegen der Lorentz-Kontraktion nicht für die Ladungsdichte. In der Tat ist erst $dq = \rho d^3r$ invariant unter Koordinatentransformation. Multipliziert man den Skalar dq mit dem Vierervektor dx^μ erhält man

$$dq dx^\mu = \rho d^3r dx^\mu = \rho d\Omega \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (4.10)$$

Wir haben schon gesehen, dass $d\Omega$ ein Skalar ist. Daher muss

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (4.11)$$

ein Vierervektor sein. Die räumlichen Komponenten bilden den Stromdichtevektor $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Mit dem Stromdichtevektor lässt sich die Wirkung schreiben als

$$S = - \sum_{j=1}^N \int mc^2 d\tau_j - \frac{1}{c} \int d\Omega A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

4.4 Inhomogene Maxwell-Gleichungen

Das hamiltonische Prinzip angewendet auf (4.12) liefert zwei Arten von Gleichung. Zuerst kann man die Felder als konstant Voraussetzen und die Bahnkurven variieren. Dies führt für jedes Teilchen auf die relativistischen Bewegungsgleichung (3.22). Andererseits kann man die Bahnkurven (und damit j^μ) invariant lassen und die Felder variieren. Dies liefert Gleichungen, welche den Einfluss der Materie auf die Felder beschreiben. Die Gleichungen für die Felder erhält man als Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu / \partial x^\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}, \quad (4.13)$$

für die Potentiale A_μ . Hierbei ist zu beachten, dass die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{mf} + \mathcal{L}_f = -A_\mu j^\mu / c - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 16\pi$ keinen Beitrag vom Materieanteil S_m der Wirkung enthält, da dieser nicht von A_μ abhängt.

Zuerst werten wir die partiellen Ableitungen der Lagrangedichte nach den Potentialen aus. Wir erhalten (da $F_{\mu\nu}$ nur von $\partial A_\mu / \partial x^\nu$ abhängt)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} j^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu / \partial x^\nu)} = -\frac{1}{8\pi} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial(\partial A_\mu / \partial x^\nu)} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Damit wird die Euler-Lagrange-Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.15)$$

Setzen wir in (4.15) $\mu = 0$ erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (4.16)$$

Zudem erhalten wir mit $\mu = j$ die drei Gleichungen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4.17)$$

Zusammen bilden (4.16) und (4.17) die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Die Kovarianz dieser beiden Gleichungen folgt direkt aus der Äquivalenz mit (4.15).

Bilden wir die Viererdivergenz von (4.15) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (4.18)$$

Die linke Seite verschwindet identisch, da sie eine Kontraktion eines symmetrischen Tensors $\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu$ mit einem antisymmetrischen Tensor $F^{\mu\nu}$ darstellt. Damit erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (4.19)$$

in manifest-kovarianter Schreibweise.

4.5 Transformation der elektromagnetischen Felder

Da die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} Komponenten des antisymmetrischen Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ sind, können wir deren Transformationsverhalten aus dem allgemeinen Transformationsgesetz $F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau F_{\sigma\tau}$ herleiten. Unter einer speziellen Lorentz-Transformation erhalten wir aus $F' = \Lambda(-\chi)F\Lambda^t(-\chi)$ nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & B'_1 &= B_1, \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wie in (2.17) kann man dieses Resultat auf einen allgemeinen Lorentz-Boost verallgemeinern und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{B}_{\perp}), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}_{\perp}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.6 Energie-Impuls-Tensor

Analog zum Übergang vom der Lagrangefunktion zu der Hamiltonfunktion in der Teilchenmechanik, kann man von der Lagrangedichte zur Hamiltondichte übergehen. Betrachten wir zuerst den Fall freier Felder mit $S_{mf} = 0$. Dann hängt \mathcal{L} nicht explizit von x_μ ab und wir erwarten, dass es einen Erhaltungssatz verbunden mit der Energiedichte

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\partial A_\sigma / \partial x^\mu)} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_f = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_f \quad (4.22)$$

gibt. In der Tat erhalten wir nach kurzer Rechnung, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(F^{\mu\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Bewegungsgleichung $\partial F^{\mu\sigma} / \partial x^\mu = 0$ verwendet haben. Integriert man die Gleichung (4.23) über dein Raum bei fester Zeit, erhält man dass

$$0 = \int d^3r \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r T^{0\nu} + \int d^3r \frac{\partial}{\partial r^j} T^{j\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r T^{0\nu}, \quad (4.24)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Felder und damit $T^{\mu\nu}$ genügend schnell abfallen, so dass die Integration über die Divergenz keinen Beitrag gibt. Damit bekommen wir die Erhaltung $\partial P^\mu / \partial t = 0$ des Vierervektors

$$P^\mu = \int d^3r T^{0\mu}, \quad (4.25)$$

welchen man mit dem Viererimpulsvektor des elektromagnetischen Feldes identifizieren kann.

Der Tensor $T^{\mu\nu}$ ist durch die Eigenschaft $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu = 0$ nicht eindeutig definiert. In der Tat können wir zu $T^{\mu\nu}$ einen beliebigen Viererdivergenz $\partial \psi^{\mu\nu\sigma} / \partial x^\sigma$ eines Tensors ψ mit $\psi^{\mu\nu\sigma} = -\psi^{\sigma\nu\mu}$ addieren, ohne dass sich der Viererimpuls P^μ ändert. Wir können den Energie-Impuls-Tensor eindeutig machen, indem wir die Zusatzforderung stellen, dass der vierdimensionale Drehimpulstensor $L^{\mu\nu}$ durch die gewöhnliche Form

$$L^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu) = \int d^3r (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) \quad (4.26)$$

gegeben ist. Genauso wie aus dem Verschwinden der Viererdivergenz $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu$ die lokale Formulierung der Viererimpulserhaltung darstellt. Er gibt sich aus dem Verschwinden der Viererdivergenz $\partial(x^\mu T^{\sigma\nu} - x^\nu T^{\sigma\mu})/\partial x^\sigma$, die Drehimpulserhaltung $\partial L^{\mu\nu}/\partial t = 0$. Die lokaler Form der Drehimpulserhaltung erfordert daher, dass

$$0 = \frac{\partial(x^\mu T^{\sigma\nu} - x^\nu T^{\sigma\mu})}{\partial x^\sigma} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} \quad (4.27)$$

d. h. $T^{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer Tensor.

Zur Symmetrisierung des Tensors in (4.22) fügen wir den Term

$$\frac{F^{\mu\sigma} \partial A_\nu}{4\pi \partial x^\sigma} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(F^{\mu\sigma} A_\nu)}{\partial x^\sigma}$$

hinzu. Damit erhalten wir den korrekt-symmetrisierten Ausdruck des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} F^\nu{}_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right). \quad (4.28)$$

Als Nebeneffekt hängt die symmetrisierte Form von $T_{\mu\nu}$ nur noch vom Feldstärketensor und nicht mehr direkt von den Potentialen ab. Zudem gilt, dass er spurlos ist mit $T^\mu{}_\mu = 0$.

Man kann den Energie-Impuls-Tensor direkt durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ausdrücken. Einsetzen von (3.24) liefert

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} u & \mathbf{S}^t \\ \mathbf{S} & -\sigma \end{array} \right) \quad (4.29)$$

mit der Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (4.30)$$

dem Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (4.31)$$

und dem maxwellschen Spannungstensor

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{4\pi} \left[E_k E_l + B_k B_l - \frac{1}{2} \delta_{kl} (E^2 + B^2) \right]. \quad (4.32)$$

Der lokale Erhaltungssatz $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu$ enthält mit $\nu = 0$ das Poynting Theorem

$$0 = \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \quad (4.33)$$

und mit $\nu = j$ die Impulserhaltung

$$0 = \frac{\partial T^{\mu j}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial r_k} \quad (4.34)$$

mit dem Impulsstromdichte σ_{jk} .

Durch Konstruktion ist auch die Drehimpulsdichte in der Form $L^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\nu$ erhalten,

$$\frac{\partial L^{\mu\nu\sigma}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(T^{\mu\nu}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\nu)}{\partial x^\mu} = 0. \quad (4.35)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (4.27) erhält man lokale Erhaltungsgrößen die den Tensoren $L^{0\mu\nu}$ entsprechen. Wie im Kapitel 3.4 besprochen besteht dieser Tensor sowohl aus der Drehimpulsdichte $L_k \propto \varepsilon_{klm}L^{0lm}$ als auch aus dem Massenmoment $N^k \propto L^{00k}$, welches mit der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung zusammenhängt.

4.6.1 Erhaltungssätze in Anwesenheit von geladener Materie

Bis jetzt haben wir das ladungsfreie Feld betrachtet. Sind nun geladene Teilchen vorhanden, so bekommt der Energie-Impuls-Tensors einen Beitrag der geladenen Teilchen, welchen wir im Folgenden bestimmen möchten. In Anwesenheit von Ladung, ergibt die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors

$$\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - F_{\nu\sigma} \frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.36)$$

In diese Gleichung setzen wir die Maxwell-Gleichungen (4.3) und (4.15) in der Form

$$\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial F_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau}, \quad \frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\sigma$$

ein und erhalten

$$\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\sigma\tau} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau} - F^{\mu\sigma} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{4\pi}{c} F_{\nu\sigma} j^\sigma \right).$$

Durch Umbenennung der Summationsindizes können wir leicht feststellen, dass sich die ersten drei Terme gerade wegheben. Wir erhalten somit das Resultat

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\sigma} j_\sigma. \quad (4.37)$$

Die rechte Seite bekommt wieder die Interpretation einer lorentzischen Viererkräftdichte (Viererimpulsübertrag pro 4D-Volumenelement).

Die Zeitkomponente der Gleichung (4.37) führt auf die Energieerhaltung

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) = -\frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (4.38)$$

und die Raumkomponente führt auf die Impulserhaltung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial r_k} = - \left[\rho E_j + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})_j \right] \quad (4.39)$$

des Feldes in Anwesenheit der Materie beschrieben durch $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$.

4.7 Energie-Impuls-Tensor makroskopischer Körper

Gleich wie beim Übergang von (4.9) zu (4.11) möchten wir eine Ansammlung von Massenpunkten als kontinuierliches System auffassen, welches durch einen Energie-Impuls-Tensor beschrieben wird. Wir betrachten ein Flächenelement d^2S mit der Normalen \mathbf{n} . Der Impulsstrom durch dieses Flächenelement gerade der Kraft

$$dF_k = \sigma_{kl} n_l d^2S, \quad (4.40)$$

welche auf das Flächenelement wirkt. Wir möchten ein isotropes System beschreiben, so dass im lokalen Ruhesystem die Kraft in alle Richtungen gleich ist. Damit kann man sie durch einen isotropen Druck p beschreiben mit

$$dF_k = -p d^2S. \quad (4.41)$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert den Spannungstensor $\sigma_{kl} = -p \delta_{kl}$. Wegen der Isotropie in dem lokalen Ruhesystem verschwinden die Komponenten $T^{\mu 0}$ und die Komponente T^{00} , welche die Energiedichte mißt, ist proportional zu der Massendichte $T^{00} = \rho c^2$.

Um die Gestalt des Energie-Impuls-Tensors in einem allgemeinen Bezugssystem zu finden, muss man ihn mit der Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$ in eine kovariante Form bringen. Der Tensor $T^{\mu\nu}$ muss so gewählt werden, dass er im Ruhesystem mit $u^\mu = (c, \mathbf{0})$ die obige Gestalt aufweist. Es ist einfach zu sehen, dass

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (4.42)$$

dieser Anforderung genügt.³ Dieser Ausdruck stellt den Energie-Impuls-Tensor eines makroskopischen Körpers da. Aus (4.42) erhält man direkt

$$u = \frac{\rho c^2 + p v^2 / c^2}{1 - v^2 / c^2}, \quad \mathbf{S} = \frac{(\rho c^2 + p) \mathbf{v}}{1 - v^2 / c^2}, \quad \sigma_{kl} = -\frac{(\rho + p / c^2) v_k v_l}{1 - v^2 / c^2} - p \delta_{kl}.$$

Aus dem Ausdruck (4.42) folgt sofort

$$T^\mu{}_\mu = \rho c^2 - 3p. \quad (4.43)$$

Durch die Stabilitätsbedingung $T^\mu{}_\mu \geq 0$ erhält man damit die Ungleichung

$$p \leq \frac{\rho c^2}{3}, \quad (4.44)$$

wobei das Gleichheitszeichen für massive Teilchen nie erreicht wird.

³Man kann (4.42) auch durch Lorentz-Transformation des Ausdrucks im lokalen Ruhesystem erhalten

Wie schon bei (4.28) bemerkt, findet man für den Energie-Impuls-Tensor des Strahlungsfeldes (ohne Materie), dass $T^\mu{}_\mu = 0$. Und somit gilt für das isotrope Strahlungsfeld der Strahlungsdruck (mit $\sigma_{kl} = -p\delta_{kl}$)

$$p = \frac{u}{3}. \quad (4.45)$$

Die Gleichung (4.45) ist die Zustandsgleichung des elektromagnetischen Feldes. Aus ihr lässt sich mit dem ersten und zweiten Hauptsatz ohne zusätzliche Annahmen das Stefan-Boltzmann-Gesetz herleiten. In der Tat gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = TdS - pdV \quad (4.46)$$

und somit erhalten wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p \quad (4.47)$$

durch Ableiten nach V bei festgehaltenem T . Der zweite Hauptsatz liefert die Maxwell-Beziehung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

für die freie Energie. Aus (4.47) erhalten wir daher mit $U = uV$ und $p = u/3$ sofort

$$u(T) = \frac{T}{3} \frac{\partial u(T)}{\partial T} - \frac{u(T)}{3} \quad (4.48)$$

oder äquivalent

$$\frac{\partial \log u(T)}{\partial \log T} = \frac{T}{u(T)} \frac{\partial u(T)}{\partial T} = 4. \quad (4.49)$$

Die letzte Gleichung liefert nach Integration das Stefan-Boltzmann-Gesetz $u(T) \propto T^4$.

4.8 Feld einer bewegten Ladung

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen haben in der kovarianten Schreibweise die Form (4.15). Um die homogenen Gleichungen zu lösen, können wir das Potential A^μ einführen, welche die Gleichung auf die Form

$$\square A^\mu - \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x_\mu \partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (4.50)$$

mit dem d'Alembert Operator $\square = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \nabla^2$. Da die Potentiale nur bis auf einen Gradienten festgelegt sind⁴ kann man zusätzlich die Bedingung

⁴Man nennt die Tatsache, dass sowohl A als auch A' auf denselben Felstärketensor $F = F'$ führt solange $A_\mu = A'_\mu + \partial\chi/\partial x^\mu$ die Eichfreiheit der Maxwell-Gleichungen.

$\partial A^\nu / \partial x_\nu = 0$ stellen, was man die Lorentz-Eichung nennt. Damit erfüllt das Vektorpotential die Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.51)$$

Man kann die allgemeine Lösung von (4.51) mit Hilfe der Greenschen Funktion $D(x)$ bestimmen, welche die inhomogene Gleichung

$$\square D(x) = \delta^{(4)}(x) \quad (4.52)$$

löst. Mit bekannten Methoden aus der Fourieranalysis kann man zeigen, dass

$$D_r(x^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^\mu k_\mu + i0^+ \operatorname{sgn} k_0} \quad (4.53)$$

die obenstehende Gleichung für $D(x)$ löst, wobei der imaginäre Term im Nenner, wie wir nachher zeigen werden, dafür sorgt, dass $D_r(x)$ für $x_0 < 0$ verschwindet.

Für die Integration über k_0 benötigen wir die Pole des Integranden in (4.53). Diese befinden sich bei $k_0^\pm = \pm k - i0^+$. Falls $x_0 < 0$ muss die Integrationsweg wegen dem Faktor $e^{-ik_0 x_0}$ in der oberen komplexen Halbebene geschlossen werden. Da der Integrand in diesem Halbraum keine Pole hat, verschwindet das Integral. Für den Fall, dass $x_0 > 0$ muss der Weg in der unteren Halbebene geschlossen werden. Dabei liefern beide Pole k_0^\pm einen Beitrag und wir erhalten

$$\begin{aligned} D_r(x^\mu) &= \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin(ckt)}{k} \\ &= \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \frac{\sin(ckt)}{k} \\ &= \frac{\Theta(t)}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt) \\ &= \frac{\Theta(t)}{4\pi r} \delta(ct - r) \end{aligned} \quad (4.54)$$

mit $\Theta(t)$ der Einheitssprungfunktion. In der Form $D_r(x^\mu) = \Theta(x_0) \delta(x^\mu x_\mu) / 2\pi$ ist es einfach zu sehen, dass die Funktion $D_r(x^\mu)$ auch wirklich ein Lorentz-Skalar unter orthochronen Lorentz-Transformationen ist.⁵

Die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichung (4.51) ist daher gegeben durch

$$A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x - x') j^\mu(x') \quad (4.55)$$

⁵Mit der allgemeinen Formel $\delta[f(x)] = \sum_j \delta(x - x_j) / |f'(x_j)|$, wobei x_j die (einfachen) Nullstellen von $f(x)$ sind, erhält man sofort $\Theta(t) \delta(ct - r) / r = \Theta(t) [\delta(ct - r) + \delta(ct + r)] / r = 2\Theta(t) \delta[(ct)^2 - r^2]$.

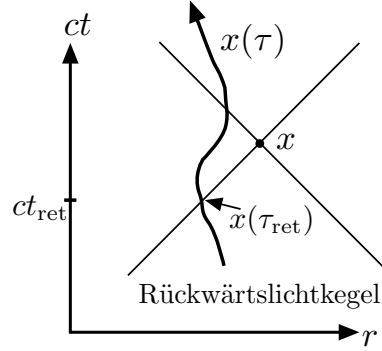


Abb. 4.1: Nur der Schnittpunkt $x^\mu(\tau_{\text{ret}})$ der Weltlinie $x^\mu(\tau)$ mit dem Rückwärtslichtkegel ausgehend vom Beobachtungspunkt x liefert einen Beitrag von der Ladung, welche sich auf $x^\mu(\tau)$ bewegt, zum Potential am Punkt x .

mit $A_0(x)$ einer Lösung der homogenen Wellengleichung. Da wir annehmen, dass die Quelle in Raum und Zeit lokalisiert ist, verschwindet im Grenzfall $x_0 \rightarrow -\infty$ der zweite Term und $A_0(x)$ entspricht der einlaufenden Lösung zur Anfangszeit.

Betrachten wir eine Punktladung q , welche sich auf der Bahn $\mathbf{r}(t)$ (im System S) bewegt, dann ist die Ladungs- und Stromdichte gegeben durch

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)], \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}(t) \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] \quad (4.56)$$

mit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ der Geschwindigkeit in S . Diese Dichten können in kovarianter Form geschrieben werden, indem man die Weltlinie des Teilchens durch die Eigenzeit τ parameterisiert. Durch einfaches Nachrechnen kann man sich überzeugen, dass die Viererstromdichte

$$j^\mu(x) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}[x - x(\tau)] \quad (4.57)$$

die kovariante Formulierung von (4.56) darstellt. Das Einsetzen von (4.57) in (4.55) (mit $A_0 = 0$) und anschließender Integration über x' liefert

$$A^\mu(x) = 2q \int d\tau u^\mu(\tau) \Theta[x^0 - x^0(\tau)] \delta\{[x - x(\tau)]^2\}. \quad (4.58)$$

Die verbleibende Integration über τ liefert nur bei τ_{ret} einen Beitrag mit $[x - x(\tau_{\text{ret}})]^2 = 0$ und $x^0 > x^0(\tau_{\text{ret}})$; d. h. der Beitrag kommt vom Rückwärtslichtkegel ausgehend vom Beobachtungspunkt. Wegen der Bedingung $|\dot{\mathbf{r}}| < c$ gibt es nur einen solchen Schnittpunkt, siehe Abb. 4.1. Damit erhält man das Viererpotential

$$A^\mu(x) = \left[\frac{q u^\mu(\tau)}{u_\nu(\tau) [x^\nu - x^\nu(\tau)]} \right]_{\text{ret}}, \quad (4.59)$$

wobei sich „ret“ darauf bezieht, dass die Teilchenposition und die Teilchengeschwindigkeit an der retardierten Zeit $\tau = \tau_{\text{ret}}$ ausgewertet werden müssen. Das Potential (4.59) heißt Liénard-Wiechert Potential.

Es ist lehrsam, das Potential in Raum- und Zeitkomponenten aufzuteilen. Mit $R\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})$, $R = c(t - t_{\text{ret}})$ erhalten wir

$$u_\mu[x^\mu - x^\mu(\tau_{\text{ret}})] = \gamma c^2(t - t_{\text{ret}}) - \gamma \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})] = \gamma c R(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)$$

und somit

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{q}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{q\mathbf{v}/c}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)R} \right]_{\text{ret}}. \quad (4.60)$$

4.9 Doppler-Effekt

In der Herleitung von (4.53) haben wir den Viererwellenvektor $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ mit $k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ eingeführt. Aus der Elektrodynamik-Vorlesung ist bekannt, dass das elektromagnetische Feld einer monochromatischen Lichtwelle durch

$$\mathbf{E}(x^\mu) = \mathcal{E} \cos(k_\mu x^\mu) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(x^\mu) = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}(x^\mu) \quad (4.61)$$

gegeben ist, wobei $\mathcal{E} \perp \mathbf{k}$ die (lineare) Polarisation festlegt und $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ ist. Da die Maxima und Minima der elektromagnetischen Felder messbar sind, muss die Phase $k_\mu x^\mu$ ein Lorentz-Skalar sein und damit k_μ ein kovarianter Vierervektor. Mit (2.17) erhält man daher die Transformationsformeln

$$\omega' = \gamma(\omega - c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}), \quad k'_\parallel = \gamma(k_\parallel - \beta\omega/c), \quad \mathbf{k}'_\perp = \mathbf{k}_\perp. \quad (4.62)$$

Für Lichtwellen gilt die relativistische Dispersionsrelation $k_0 = \omega/c = |\mathbf{k}|$, so dass k^μ durch ω und den Winkel θ zwischen \mathbf{k} und $\boldsymbol{\beta}$ festgelegt wird mit $k_\perp = c\omega \sin \theta$ und $k_\parallel = c\omega \cos \theta$. Aus (4.62) erhält man, dass sich diese Größen wie

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta), \quad \tan \theta' = \frac{k'_\perp}{k'_\parallel} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)} \quad (4.63)$$

transformieren die erste Formel beschreibt die relativistische Dopplerverschiebung, während die zweite Formel die Lichtabberation darstellt, vgl. (2.24).

Weiterhin wollen wir die Transformationsregel der Amplitude \mathcal{E} zu bestimmen. Dafür werden wir verwenden, dass $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{B}}$ mit $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathcal{E}}$ eine orthonormale Basis bilden. Um die Rechnung zu vereinfachen, wählen wir das Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^t$. Die Felder \mathcal{E}, \mathcal{B} transformieren

dann nach (4.20) und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'^2 &= \mathcal{E}_1^2 + \gamma^2(\mathcal{E}_2 - \beta\mathcal{B}_3)^2 + \gamma^2(\mathcal{E}_3 + \beta\mathcal{B}_2)^2 \\ &= \gamma^2\mathcal{E}^2[1 - 2\beta(\hat{\mathcal{E}}_2\hat{\mathcal{B}}_3 - \hat{\mathcal{E}}_3\hat{\mathcal{B}}_2) + \beta^2(1 - \hat{\mathcal{B}}_1^2 - \hat{\mathcal{E}}_1^2)] \\ &= \gamma^2\mathcal{E}^2(1 - 2\beta\hat{k}_1 + \beta^2\hat{k}_1^2) = \gamma^2\mathcal{E}^2(1 - \beta\hat{k}_1)^2;\end{aligned}$$

hier haben wir die Orthonormalität in der Form $(\hat{\mathcal{E}} \wedge \hat{\mathcal{B}})_1 = \hat{\mathcal{E}}_2\hat{\mathcal{B}}_3 - \hat{\mathcal{E}}_3\hat{\mathcal{B}}_2 = \hat{k}_1$ und $\hat{k}_1^2 + \hat{\mathcal{E}}_1^2 + \hat{\mathcal{B}}_1^2 = 1$ verwendet. Mit $\hat{k}_1 = \cos\theta$ können wir die Transformation der Wellenamplitude im Allgemeinen schreiben als

$$\mathcal{E}' = \frac{1 - \beta \cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{1 + \beta \cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathcal{E}'. \quad (4.64)$$

4.10 Ideale Flüssigkeit

Wir betrachten eine Ansammlung von Massenpunkten mit Dichte ρ und (isotropem) Druck p , welche sich lokal mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ bewegen. Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ hat die Form

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}$$

mit der lokalen Vierergeschwindigkeit $u^\mu(\mathbf{r}, t) = [c, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, siehe (4.42). Falls die Massenpunkte eine ideale Flüssigkeit ohne Viskositäten darstellen, gilt die lokale Energie-Impulserhaltung⁶

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \left(u^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}\right) + u^\nu u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x^\nu}.$$

Nach Kontraktion mit u_ν erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}0 &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \left(c^2 \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + \overbrace{u^\mu u_\nu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}}^{=0}\right) + c^2 u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) - u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \\ &= c^2 \frac{\partial(\rho u^\mu)}{\partial x^\mu} + p \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu}.\end{aligned} \quad (4.65)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt $u^\mu = (c, \mathbf{v})$ und $p \ll \rho c^2$. Damit vereinfacht sich (4.65) zu der Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial(\rho u^\mu)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}).$$

⁶Wir nehmen an, dass die Massenpunkte ungeladen sind und daher keine Kopplung an das elektromagnetische Feld stattfindet.

Subtrahieren wir von $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu$ die Gleichung (4.65) multipliziert mit u^ν/c^2 , erhalten wir die zusätzliche Bedingungen

$$0 = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p}{\partial x^\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^\mu}. \quad (4.66)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall reduzieren sich die räumlichen Komponenten mit $\nu = j$ auf die Eulergleichungen

$$0 = \rho u^\mu \frac{\partial v_j}{\partial x^\mu} + \frac{\partial p}{\partial r_j} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p,$$

welche die konvektive Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes mit dem Druckgradienten verbindet.

Der Energietensor der idealen Flüssigkeit spielt in der Kosmologie eine zentrale Rolle, weil die Bestandteile des Universums auf Grund ihrer schwachen Wechselwirkung sich in guter Näherung wie ideale Flüssigkeiten verhalten.

4.11 Thermodynamik

4.11.1 Schwarzkörperstrahlung

Das Relativitätsprinzip erlaubt es uns aus dem planckschen Strahlungsgesetz

$$K'_{\omega'} = \frac{\hbar\omega'^3}{4\pi^3 c^2 (e^{\hbar\omega'/k_B T} - 1)} \quad (4.67)$$

für die Intensität $dI' = K'_{\omega'} d\omega' d\Omega'$ der Schwarzkörperstrahlung bei der Temperatur T und der Kreisfrequenz ω' im Ruhesystem, die entsprechende Größe im dazu bewegten Laborsystem herzuleiten. Die Intensität ist durch den Betrag des Poynting-Vektors bestimmt. Für eine Lichtwelle (4.61) haben wir die Intensität $dI \propto |\mathcal{E} \wedge \mathcal{B}| \propto \mathcal{E}^2$. Aus (4.64) erhalten wir $dI'/dI = \gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2$ und mit den Formeln (4.63) für die Doppler-Verschiebung der Kreisfrequenz und der Transformationsformel eines Raumwinkelelements

$$d\Omega' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d\Omega, \quad (4.68)$$

siehe (2.26), finden wir

$$K'_{\omega'} = K_\omega \gamma^3 (1 - \beta \cos \theta)^3 \quad (4.69)$$

Das planckschen Strahlungsgesetz hat damit im Laborsystem die Form

$$K_\omega = \frac{K'_{\omega'}}{\gamma^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2 [e^{(\hbar\omega/k_B T)\gamma(1 - \beta \cos \theta)} - 1]}. \quad (4.70)$$

Nach der Integration von (4.70) über alle Frequenzen erhalten wir die Richtungsabhängigkeit der Intensität der Schwarzkörperstrahlung⁷

$$I(\theta) = \int_0^\infty d\omega K_\omega = \frac{\sigma}{\pi} \frac{T^4}{\gamma^4(1 - \beta \cos \theta)^4} \quad (4.71)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten $\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60 \hbar^3 c^2$. Die Intensität ist in der Vorwärtsrichtung mit $\theta \approx 0$ am größten, siehe Abb. 2.2.

Die Gesamtenergie, welche im Hohlraum mit dem Volumen V vorhanden ist, bekommt man aus der Beziehung $|\mathbf{S}| = cu$, welche für elektromagnetische Strahlung gilt. Damit erhält man

$$U = V \int d\Omega \frac{I(\theta)}{c} = \frac{4\gamma^2(1 + \frac{1}{3}\beta^2)\sigma}{c} VT^4 = \gamma(1 + \frac{1}{3}\beta^2)U', \quad (4.72)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass $V' = \gamma V$. Die Gleichung (4.72) kann man auch direkt aus der Transformation $u = T^{00} = \Lambda^0_\mu(-\chi)\Lambda^0_\nu(-\chi)T'^{\mu\nu} = \gamma^2(u' - \beta^2\sigma'_{11}) = \gamma^2(u' + \frac{1}{3}\beta^2u')$ erhalten, wobei wir verwendet haben, dass $\sigma_{11} = -p = -\frac{1}{3}u$ ist, vgl. (4.45).

4.12 Ideales Gas

Wir erwarten, dass sich relativistische Effekte in der Behandlung von idealen Gasen von Teilchen der Masse m in der statistischen Mechanik bemerkbar machen, sobald die typische Geschwindigkeit v_{typ} gegeben durch $v_{\text{typ}}^2 = k_B T$ vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit wird. Wir führen daher den dimensionslosen Parameter

$$\alpha = \frac{c^2}{v_{\text{typ}}^2} = \frac{mc^2}{k_B T} \quad (4.73)$$

ein. Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt $\alpha \gg 1$ und man erreicht $\alpha = 1$ bei der Temperatur $T_c = mc^2/k_B$. Relativistische Effekte in der Behandlung idealer Gase ist akademisch, da T_c für Wasserstoff schon bei 10^{13} K ist. Trotzdem wollen wir die thermodynamischen Größen für ein relativistisches ideales Gas bestimmen.

Die Energie eines Teilchens ist gegeben durch die Energie-Impuls-Beziehung

$$E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (4.74)$$

Die freie Energie hat die Form $F = -Nk_B T \log Z_1$, wobei (mit $p =$

⁷Wir verwenden das Resultat $\int_0^\infty d\omega \omega^3 / (e^{\alpha\omega} - 1) = \pi^4 / 15\alpha^4$.

$mc \sinh \chi$)

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= V \int d^3p e^{-E(p)/k_B T} = 4\pi V \int_0^\infty dp p^2 e^{-E(p)/k_B T} \\
 &= 4\pi V m^3 c^3 \int_0^\infty d\chi \cosh \chi \sinh^2 \chi e^{-\alpha \cosh \chi} \\
 &= 4\pi V m^3 c^3 \frac{K_2(\alpha)}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

die Zustandssumme eines Teilchens ist; hier, haben wir die Macdonald-Funktion zweiter Ordnung $K_2(x) = \int_0^\infty dt \cosh(2t) \exp(-x \cosh t)$ eingeführt. Die freie Energie ist daher bis auf eine Konstante gegeben durch

$$F(V, T, N) = -Nk_B T [\log V + \log K_2(\alpha) - \log \alpha]. \tag{4.76}$$

Die restlichen thermodynamischen Größen folgen durch die üblichen Relationen

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \quad U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = -T \frac{\partial(F/T)}{\partial \log T}. \tag{4.77}$$

Die erste Gleichung ergibt die Zustandsgleichung

$$p = \frac{Nk_B T}{V}, \tag{4.78}$$

welche mit derjenigen des nichtrelativistischen idealen Gases übereinstimmt. Allerdings wird die Gleichung für die innere Energie geändert und wir haben neu (wir verwenden, dass $d \log T = -d \log \alpha$)

$$U = Nk_B T \{1 - \log'[K_2(\alpha)]\alpha\}. \tag{4.79}$$

Für $\alpha \gg 1$ haben wir die asymptotische Form $K_2(\alpha) \simeq \sqrt{\pi/2\alpha} e^{-\alpha}$ und daher $\log'[K_2(\alpha)] \simeq -(1/2\alpha) - 1$ und

$$U \simeq Nk_B T (\alpha + \frac{3}{2}) = Nmc^2 + \frac{3}{2} Nk_B T, \tag{4.80}$$

was bis auf die Ruheenergie mit dem bekannten Resultat übereinstimmt. Durch Entwicklung von $K_2(\alpha)$ zur nächsten Ordnung bekommt man die erste relativistische Korrektur zur inneren Energie

$$\Delta U = \frac{15k_B T}{8mc^2} Nk_B T. \tag{4.81}$$

Kapitel 5

Allgemeine Relativitätstheorie

Wir haben bis jetzt die Bewegungsgleichung eines Teilchens nur in Inertialsystemen aufgeschrieben. Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass in nichtinertialen Bezugssystemen zusätzlich Scheinkräfte auftreten. Die Allgemeine Relativitätstheorie erweitert die Spezielle Relativitätstheorie, indem sie auch nichtinertiale Bezugssysteme als Bezugssysteme zulässt. Wie wir später sehen werden, wird die Gravitationskraft dann einfach als Scheinkraft in einem nichtinertialen Bezugssystem uminterpretiert.

5.1 Geodätengleichung

Die Beschreibung von Scheinkräften in der Relativitätstheorie ist nicht so einfach, da Beschleunigte Bezugssysteme, wie wir in den Übungen schon am Beispiel der Thomas-Präzision gesehen haben, sofort zu nicht-euklidischen Räumen führt. In diesen Räumen wird die Bogenlänge, welche eine Invariante darstellt, durch den (differentiellen) Ausdruck

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (5.1)$$

beschrieben. Physikalisch ist dieser Ausdruck invariant, da ds/c der Eigenzeit eines Beobachters entspricht, welcher sich auf einer Bahn von x^μ nach $x^\mu + dx^\mu$ bewegt. Hier übernimmt die koordinatenabhängige symmetrische Matrix $g_{\mu\nu}(x)$ die Rolle der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ in einem Inertialsystem. Geodäten $x(\tau)$ („kürzeste“ Verbindungen) sind dabei charakterisiert durch

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = \delta \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} dt \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (5.2)$$

bei festgehaltenen Endpunkten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, vgl. (3.12). Wie wir in Kapitel 3.3.1 bereits gesehen haben, bewegen sich kräftefreie Teilchen auf Bahnen,

welche einem Extremum der Eigenzeit $\int d\tau = \int ds/c$ entsprechen. Dementsprechend folgen kräftefreie Teilchen in der Allgemeinen Relativitätstheorie Geodäten und die Wirkung der Gravitation als Scheinkraft ist einfach in der Metrik, welche die explizite Form der Geodäten verändert, „versteckt“.

Um einen Ausdruck für die Geodätengleichung bekommen, müssen wir die Wirkung (5.2) variieren. Es ist dabei zu beachten, dass die Variation nicht bei fester Bogenlänge sondern bei festen Endpunkten durchzuführen ist. Daher muss man eine Parametrisierung einführen, dessen Grenzen $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ fest sind mit $x(t^{(1)}) = x^{(1)}$ und $x(t^{(2)}) = x^{(2)}$, um danach die rechte Seite von (5.2) zu variieren. Die Variation ist auf Grund der Wurzel ziemlich mühsam. In der Praxis verwendet man daher einen Trick. Man führt das folgende Variationsproblem ein

$$0 = \delta \int dt [\lambda^{-1} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \lambda] \quad (5.3)$$

mit $\lambda(t)$ einer Hilfsfunktion. Die Variation von $\lambda(t)$ führt auf die Bedingung, dass $\lambda^{-2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$, beziehungsweise $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \lambda^2$. Am Extremum ist daher (5.3) von der Form $0 = \delta \int dt \lambda$. Einsetzen von $\lambda = (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} = ds/dt$ zeigt, dass das Variationsproblem (5.3) äquivalent zu (5.2) ist.

Parameterisiert man nun die Bahn durch die Eigenzeit mit $\lambda = ds/d\tau = c$ (am Extremum), erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} d\tau \left[c^{-1} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + c \right] \\ &= \delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} \frac{d\tau}{c} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \underbrace{\delta \int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{(2)}} c d\tau}_{=0}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Damit zeigt man, dass (5.2) äquivalent ist zu

$$0 = \delta \int d\tau g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (5.5)$$

solange die Bahn durch die Eigenzeit am Extremum parameterisiert wird. Die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Variationsprinzip (5.5) sind die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\beta(\tau)}{d\tau}, \quad (5.6)$$

mit τ der Eigenzeit und den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (5.7)$$

wobei $g^{\mu\nu}$ die inverse Matrix zu $g_{\mu\nu}$ bezeichnet.

5.2 Äquivalenzprinzip

Bereits Newton hat bemerkt, dass die Inertialmasse m_i , welche die Dynamik eines Körpers in einem Inertialsystem via $m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ bestimmt, gleich der schweren Masse m_g des Körpers ist, welche im Gravitationsgesetz $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$ auftritt. Diese Gleichheit lässt sich zum Beispiel durch Versuche mit Pendeln verschiedener Zusammensetzung testen, da deren Periode proportional zu $\sqrt{m_i/m_g}$ ist. Geht man von der Äquivalenz schwerer und träger Masse aus, so kann man im freien Fall ein homogenes und stationäres Gravitationsfeld nicht messen.

Zum Beispiel gilt für N Massenpunkte mit paarweiser Wechselwirkung $\mathbf{F}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$ im nichtrelativistischen Grenzfall die Bewegungsgleichung

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = m_j \mathbf{g} + \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad (5.8)$$

wobei die Vektoren \mathbf{r}_j bezüglich der Erde, welche die Gravitationskraft $m_j \mathbf{g}$ erzeugt, gemessen werden. Transformiert man nun auf das mitfallende System

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2, \quad t' = t, \quad (5.9)$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}'_j = \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}'_k). \quad (5.10)$$

Ein Experimentator im frei fallenden System findet die gleichen Gesetze der Mechanik, wie ein Experimentator in einem Inertialsystem ohne Gravitationskraft. Das *Äquivalenzprinzip* verallgemeinert diesen Sachverhalt auf alle Naturgesetze:

- Gegeben ein Ereignis in einem beliebigen Gravitationsfeld, dann lässt sich immer ein *lokales* Inertialsystem finden, so dass innerhalb eines genügend kleinen Gebietes die Naturgesetze dieselbe Form annehmen wie in einem unbeschleunigten kartesischen Koordinatensystem in Abwesenheit von Gravitationskräften.

Ein solches Bezugssystem wird *lokales Inertialsystem* genannt. In einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie. Die Gravitationskraft ist einfach eine Scheinkraft, welche durch eine Wahl des lokalen Koordinatensystems eliminiert werden kann. Damit wird die Gleichheit von schwerer und träger Masse eine Äquivalenz. Allerdings ist die Raumzeit im Allgemeinen gekrümmt. Die Bewegungsgleichung eines kräftefreien Teilchens¹ ist dann gegeben durch die Geodätengleichung (5.6), wobei die rechte

¹In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Teilchen auf das nur die Gravitationskraft und nicht die Lorentzkraft wirkt ein kräftefreies Teilchen, da erstere ja nur eine Scheinkraft ist.

Seite die Rolle der Gravitationskraft (geteilt durch die Masse des Teilchens) spielt.

Als Beispiel betrachten wir die obige Transformation (5.9). Da das gestrichene Koordinatensystem ein lokales Inertialsystem ist, gilt in ihm der Minkowski-Ausdruck $ds^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2$ für die Eigenzeit. Da die Eigenzeit invariant ist, findet man im ungestrichenen System

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - g^2 t^2 dt^2 + 2t \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} dt = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (5.11)$$

mit der Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - g^2 t^2 / c^2 & \mathbf{g}^t t / c \\ \hline \mathbf{g}^t t / c & -I_3 \end{array} \right). \quad (5.12)$$

Das einzigen nichtverschwindenden Elemente des Christoffel-Symbols ist dabei gegeben durch

$$\Gamma^j_{00} = -\frac{g_j}{c^2}, \quad (5.13)$$

so dass die Geodätengleichungen die Form

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 r_j(\tau)}{d\tau^2} = g_j \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

annehmen. Die erste Gleichung wird durch $t = \alpha\tau + \beta$ gelöst und die zweite ist dann äquivalent zum newtonschen Gesetz $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G$ mit der Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$, vgl. (5.8) ohne Wechselwirkung.

5.3 Entfernungen und Zeitintervalle

In der Allgemeinen Relativitätstheorie können die Koordinaten x^μ beliebig gewählt werden. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Bezugssystemen stellt die Invariante Eigenzeit $d\tau = ds/c$ mit der Bogenlänge (5.1) da. Es stellt sich daher die Frage, wie die allgemeinen Koordinaten mit den wirklichen Entfernungen und Zeitintervallen, auf welche sich alle Beobachter (Koordinatensysteme) einigen können, zusammenhängen.

Wie schon in der SRT, stellt die Eigenzeit τ eines Raumpunktes eine kovariante Größe da, nämlich die Zeit, welche eine Uhr im lokalen Ruhesystem messen würde. Für so eine Uhr gilt $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ und der Abstand ds ist dann einfach $cd\tau$. Wir erhalten daher

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2$$

und damit

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (5.14)$$

woraus sich

$$\tau = \frac{1}{c} \int dx^0 \sqrt{g_{00}} \quad (5.15)$$

als Beziehung zwischen der Eigenzeit und den Koordinaten x^μ ergibt.

Als Nächstes wollen wir einen Ausdruck für die räumliche Entfernung dl bestimmen. Es ist nicht möglich, einfach im Ausdruck (5.1) $dx^0 = 0$ zu setzen, da in der ART die Eigenzeit in verschiedenen Raumpunkten auf verschieden Weise mit der Koordinate dx^0 verknüpft ist.

Um die räumliche Entfernung zu definieren, verwenden wir eine ähnliche Idee, wie bei der Herleitung der Lorentz-Kontraktion in der SRT. Wir betrachten zwei infinitesimal benachbarte Raumzeitpunkte A und B mit den Koordinaten x^μ und $x^\mu + dx^\mu$. Wir stellen uns vor, dass am Ort B ein Lichtsignal ausgesendet wird, welche bei A reflektiert wird und zu einem späteren Zeitpunkt $x^\mu + dx'^\mu$ am Ort B (mit fixen Raumkoordinaten $x^j = x'^j$) wieder detektiert wird. Die dafür benötigte Zeit (gemessen am Ort A) ist gerade die doppelte Entfernung zwischen den zwei Orten.

Wir schreiben für den Abstand der beiden Ereignisse

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k + 2g_{0j} dx^0 dx^j + g_{00} (dx^0)^2. \quad (5.16)$$

Zwei Ereignisse, welche durch einen Lichtsignal verknüpft sind, erfüllen $ds^2 = 0$. Auflösen von $ds^2 = 0$ nach dx^0 liefert die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} dx^0 &= \frac{1}{g_{00}} \left[-g_{0j} dx^j - \sqrt{(g_{0j} g_{0k} - g_{jk} g_{00}) dx^j dx^k} \right] \\ dx'^0 &= \frac{1}{g_{00}} \left[-g_{0j} dx^j + \sqrt{(g_{0j} g_{0k} - g_{jk} g_{00}) dx^j dx^k} \right], \end{aligned}$$

welche gerade dem Absenden und Empfangen des Lichtsignals am Ort B entsprechen. Die Eigenzeitdifferenz $d\tau$ ist nun gerade $dx'^0 - dx^0$ multipliziert mit dem Zeitdilationsfaktor $\sqrt{g_{00}}/c$. Die Entfernung dl ergibt sich daher zu

$$dl^2 = (cd\tau/2)^2 = \gamma_{jk} dx^j dx^k \quad (5.17)$$

mit der räumlichen Metrik

$$\gamma_{jk} = -g_{jk} + \frac{g_{0j} g_{0k}}{g_{00}}. \quad (5.18)$$

Es ist wichtig sich zu erinnern, dass γ im Allgemeinen von x^0 abhängt, so dass sich die räumliche Metrik mit der Zeit ändert. Es macht daher keinen Sinn von Entfernungen zu sprechen, welche mehr als infinitesimal sind, da Entfernungen von der Weltlinie abhängen, auf der sie gemessen werden.

Wie in der SRT können Lichtsignale auch dazu verwendet werden, Uhren an verschiedenen Raumpunkten miteinander zu synchronisieren und damit den

Begriff der „Gleichzeitigkeit“ festzulegen. Betrachten wir dazu wieder den Austausch von Lichtsignalen zwischen den Raumzeitpunkten A und B . Wir definieren den Mittelwert $x^0 + (dx'^0 + dx^0)/2c$ zwischen dem Zeitpunkt des Aussendens ($x^0 + dx^0$) und des Empfangens ($x^0 + dx'^0$) des Lichtsignals am Ort B als gleichzeitig zur Zeit x^0 am Ort A . Damit ist der Zeitunterschied t (gemessen mit der Zeitskala x^0/c) zwischen der Zeit am Ort B und der Zeit am Ort A gegeben durch

$$\Delta t = \frac{1}{2c} (dx'^0 + dx^0) = -\frac{g_{0j} dx^j}{cg_{00}}. \quad (5.19)$$

Das Wissen um dem Zeitunterschied erlaubt es, die Uhren an den infinitesimal benachbarten Positionen A und B bezüglich des Beobachters A zu synchronisieren. Wir können diese Synchronisation sukzessive fortsetzen, allerdings ist es nicht möglich Uhren auf einer geschlossenen Kurve zu synchronisieren, da im Allgemeinen $\oint \Delta t \neq 0$. Da in der Allgemeinen Relativitätstheorie Uhren an verschiedenen Raumpunkten in demselben Bezugssystem unterschiedlich schnell gehen (g_{00} hängt im Allgemeinen von x^j ab) bleibt die Synchronisation auch nicht bestehen. Die Unmöglichkeit der Synchronisation der Uhren ist eine Eigenschaft des Bezugssystems, da man immer ein System wählen kann mit $g_{0j} = 0$.

5.4 Beschleunigte Bezugssysteme

In diesem Kapitel untersuchen wir zwei einfache Beispiele beschleunigter Bezugssysteme in einem flachen Minkowski-Raum. Diese Beispiele kann man auch im Rahmen der SRT abhandeln (was wir zum Teil in den Übungen gemacht haben), wobei man alles von einem Inertialsystem beschreibt und dann jeweils in das lokale Ruhesystem transformiert. Ein Beispiel war der Ausdruck (1.17) für die Eigenzeit eines allgemein beschleunigten Beobachters.

5.4.1 Ruhesystem eines konstant-beschleunigten Beobachters

Wir betrachten ein Bezugssystem, das einer konstanten Beschleunigung a entlang der x -Richtung ausgesetzt ist. Ein Beispiel ist das Ruhesystem eines geladenen Teilchens, das einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = (am/q, 0, 0)$ ausgesetzt ist. Da die y - und z -Koordinaten von der Beschleunigung nicht betroffen sind, werden wir uns auf die 2×2 Metrik im (ct, x) -Unterraum beschränken. Die Bahn haben wir in (3.29) bestimmt. Sie ist gegeben durch eine Hyperbel der Form

$$x = h \cosh \chi = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (5.20)$$

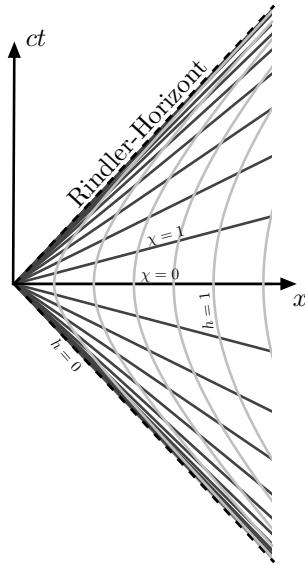


Abb. 5.1: Die Rindler-Koordinate dargestellt in der (t, x) -Ebene, welche eine flache Minkowski-Raumzeit beschreibt. Die χ -Achsen (dunkel) gehen meistens horizontal und die h -Achsen (hell) vertikal. Beide werden kollinear am Rindler-Horizont mit $x^2 = c^2 t^2$ (gestrichene Linie).

mit dem Scheitelpunkt $h = c^2/a$ und $\sinh \chi = at/c$, d. h. $ct = h \sinh \chi$.

Wir wollen jetzt neue Koordinaten einführen. Wir wechseln von x und t auf $h \geq 0$ und χ . Ein Beobachter, welcher in Ruhe bezüglich h ist, führt daher eine konstant-beschleunigte Bewegung im Inertialsystem aus. Die Koordinate χ beschreibt dabei die Rapidität (welche konstant anwächst) und h die (inverse) Beschleunigung. Wir erhalten

$$dx = \cosh \chi dh + h \sinh \chi d\chi, \quad cdt = \sinh \chi dh + h \cosh \chi d\chi$$

und daher

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = h^2 d\chi^2 - dh^2. \quad (5.21)$$

mit dem (diagonalen) metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

welche auch Rindler-Metrik genannt wird.

Die Eigenzeit ist daher gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{c} \int d\chi \sqrt{g_{00}} = \frac{c\chi}{a} = \frac{c \operatorname{arsinh}(at/c)}{a} \quad (5.23)$$

vgl. (3.30).

Die Rindler-Koordinaten stellen nur Ereignisse mit $0 \leq x \leq ct$ dar, siehe Abb. 5.1. In der Tat liegen alle Ereignisse mit $x^2 = c^2 t^2$ bei $h = 0$, wo die

Rindler-Metrik nicht mehr invertierbar ist. Somit stellt $h = 0$ den Rand der Rindler-Karte dar.

Eine weitere Besonderheit der Linie $h = 0$ kommt daher zustande, dass kein Beobachter, welcher sich mit konstanter endlicher Beschleunigung ($h = \text{konst.}$) bewegt, Licht aus dem Bereich mit $ct \geq x$ empfangen kann.² Auch kann keiner der Beobachter Licht in den Bereich mit $ct \leq -x$ senden. Aus der Definition von h erkennt man zudem, dass beim Horizont die Beschleunigung a divergiert. In diesem Sinne stellt die Linie $h = 0$ ein (Ereignis-)Horizont dar, der sogenannte Rindler-Horizont. Wie wir später sehen werden, entspricht dieser Horizont dem Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs, da die Rindler-Metrik genau der Schwarzschild-Metrik eines Beobachters mit fester Entfernung zum Zentrum entspricht (entsprechend der Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation).

5.4.2 Geodäten

Die Geodäten der Rindler-Koordinaten sind natürlich ausgedrückt durch t, x einfach Geraden. Es ist lehrreich, die Geodätengleichung (5.6) in diesem einfachen Fall direkt zu lösen, um diese Tatsache zu „überprüfen“. Die meisten der Christoffel-Symbole verschwinden. Die einzigen nichtverschwindenden Elemente sind $\Gamma^x_{\chi h} = \Gamma^x_{h\chi} = h^{-1}$ und $\Gamma^h_{\chi\chi} = h$. Ausgeschrieben lautet die Geodätengleichung (5.6) daher

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \frac{2}{h} \frac{d\chi}{d\tau} \frac{dh}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2h}{d\tau^2} + h \frac{d\chi}{d\tau} \frac{d\chi}{d\tau} = 0. \quad (5.24)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$h^{-2} \frac{d}{d\tau} \left(h^2 \frac{d\chi}{d\tau} \right) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $d\chi/d\tau = c\alpha/h^2$. Zudem wissen wir, dass für ein massives Teilchen

$$c^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2} = h^2 \left(\frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dh}{d\tau} \right)^2$$

gilt, woraus sich $dh/d\tau = \pm c\sqrt{\alpha^2/h^2 - 1}$ ergibt (und damit $h \leq \alpha$). Zusammen mit der Gleichung für $d\chi/d\tau$ erhalten wir

$$\frac{dh}{d\chi} = \pm h \sqrt{1 - h^2/\alpha^2}.$$

²Kommunikation mit dem Bereich $ct > x$ ist allerdings nicht prinzipiell unmöglich. Zum Beispiel kann ein Beobachter stehenbleiben und dann den Rindler-Horizont überqueren, so dass er danach mit dem Bereich $ct > x$ kommunizieren kann

Es ist hilfreich, die Variable h durch β zu ersetzen mit

$$\pm\beta = \operatorname{artanh}(\sqrt{1 - h^2/\alpha^2}) = \operatorname{arcosh}(\alpha/h).$$

Somit gilt $d \log h/d\chi = \tanh \beta$. Man zeigt direkt, dass

$$\frac{d\beta}{d\chi} = \pm \frac{d \operatorname{arcosh}(\alpha/h)}{d \log h} \tanh \beta = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - h^2/\alpha^2}} \tanh \beta = -1$$

und damit $\beta = -\chi + \beta_0$. Für die Geschwindigkeit folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{dx}{cdt} = \left[\frac{d(h \sinh \chi)}{d\chi} \right]^{-1} \frac{d(h \cosh \chi)}{d\chi} = \frac{\tanh \chi + (d \log h/d\chi)}{1 + (d \log h/d\chi) \tanh \chi} \\ &= \tanh(\beta + \chi) = \tanh \beta_0, \end{aligned}$$

d. h. sie ist konstant entlang der Geodäten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Geodäte am Ort $x_0 = h$ mit

$$\cosh \beta = \cosh \beta_0 = \alpha/|x_0|,$$

d. h. $x_0 = \pm \sqrt{1 - v^2/c^2} \alpha$. Die Integrationskonstanten β_0 und α bestimmen daher die Geschwindigkeit v und die Anfangsposition x_0 . Die Geodäten sind somit Geraden

$$x = x_0 + vt$$

in den ursprünglichen Koordinaten.

5.4.3 Unruh-Effekt

Der Unruh-Effekt kommt daher zustande, dass die Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Feldes für einen beschleunigten Beobachter wie eine Schwarzkörperstrahlung aussehen. Die Geschwindigkeit eines Beobachter der konstant beschleunigt wird (h fest) nimmt stetig zu. Daher wird die Frequenz einer Quelle im Inertialsystem immer mehr Doppler-verschoben. Als Beispiel betrachten wir eine ebene Welle proportional zu $\psi = e^{-i(x+ct)\omega/c}$, welche sich entgegen der Beschleunigungsrichtung ausbreitet. In den Rindler-Koordinaten hat die Welle die Form

$$\psi = \exp(ihe^x\omega/c), \quad (5.25)$$

dabei entspricht der Faktor e^x gerade der Blauverschiebung. Für den beschleunigten Beobachter hat die Welle das Spektrum

$$S(\Omega) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \psi \right|^2 \quad (5.26)$$

mit der Eigenzeit $\tau = h\chi/c = c\chi/a$.

Das Integral S kann berechnet werden, und wir erhalten

$$S(\Omega) = \frac{2\pi h}{\Omega c} \frac{1}{e^{2\pi h\Omega/c} - 1}. \quad (5.27)$$

Die Spektralverteilung sieht aus wie die Schwarzkörperstrahlung bei einer Temperatur

$$T_U = \frac{\hbar c}{2\pi k_B h} = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}. \quad (5.28)$$

5.5 Rotierendes Bezugssystem

Wir wollen als zweites Beispiel den Fall eines gleichförmig rotierenden Bezugssystem mit Winkelgeschwindigkeit Ω untersuchen. Da keine Beschleunigung entlang der Rotationsachse auftritt, beschränken wir uns auf die Diskussion der zwei Raumrichtungen orthogonal zur Rotationsachse. Wir bezeichnen die Koordinaten im unbewegten Inertialsystem mit t', x', y' mit dem Abstandsdifferential

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2. \quad (5.29)$$

Die (Polar-)Koordinaten im rotierenden System bezeichnen wir mit r, φ, t . Sie hängen via $x' = r \cos(\varphi + \Omega t), y' = r \sin(\varphi + \Omega t), t' = t$ mit den Koordinaten im Inertialsystem zusammen. Setzen wir dies in (5.29), erhalten wir

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - 2\Omega r^2 dt d\varphi, \quad (5.30)$$

was der Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 - \Omega^2 r^2 & 0 & -\Omega r^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\Omega r^2 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

entspricht; diese Metrik wird Born-Metrik genannt. Das rotierende Koordinatensystem macht nur Sinn für $r \leq c/\Omega$. Danach wird g_{00} negativ aufgrund der Tatsache, dass die Rotationsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit wird.

In einem rotierenden Bezugssystem können die Uhren nicht mehr an allen Orten eindeutig synchronisiert werden. Berechnet man nämlich die Zeitdifferenz entlang einer geschlossenen Kurve parameterisiert durch $r(\varphi)$, erhalten wir aus (5.19)

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0j}}{g_{00}} dx^j = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \Omega^2 r^2/c^2}. \quad (5.32)$$

Im Fall „kleiner“ Rotationsgeschwindigkeiten $\Omega r \ll c$ können wir den Nenner entwickeln und wir erhalten

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \frac{2\Omega}{c^2} S \quad (5.33)$$

mit S der von der geschlossenen Kurve umschlossenen Fläche (mit Vorzeichen).

Dieses Resultat liefert direkt die Erklärung des Sagnac-Effektes, welcher 1913 von Georges Sagnac gefunden wurde. Betrachten wir einen Lichtstrahl, der sich (z. B. in einem Wellenleiter) entlang der Kurve $r(\varphi)$ ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist c , wenn die Uhren entlang der Bahn des Lichtstrahls synchronisiert sind und die Eigenzeit zur Zeitmessung herangezogen wird. Wir sind interessiert in der Laufzeitdifferenz von zwei Lichtstrahlen, welche sich mit oder entgegen der Rotationsrichtung ausbreiten in tiefster Ordnung in $\Omega r/c$. Der Unterschied zwischen der Weltzeit t und der Eigenzeit τ ist gegeben durch $1/\sqrt{g_{00}} = 1 + \mathcal{O}(\Omega r/c)^2$ und damit subdominant. Für den Lichtstrahl, der sich mit der Rotationsrichtung ausbreitet, erhalten wir mit (5.33) die Laufzeit

$$\Delta t_{\odot} = \frac{L}{c} + \frac{2\Omega}{c^2}|S|$$

mit L der Länge des Wellenleiters; der zweite Term tritt hier auf Grund der Synchronisation der Uhren auf. Entgegen der Rotationsrichtung erhalten wir hingegen die Laufzeit

$$\Delta t_{\odot} = \frac{L}{c} - \frac{2\Omega}{c^2}|S|.$$

Damit wird die Laufzeitdifferenz $\Delta t = 4\Omega|S|/c^2$, was der Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 2\pi c\Delta t/\lambda$ entspricht. Lässt man die beiden Lichtstrahlen in einem Sagnac-Interferometer miteinander interferieren, erhält man ein daher ein Interferenzmuster mit der Periodizität $\Delta\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$. Sagnac-Interferometer werden dazu verwendet Rotationen absolut zu messen.

Als nächstes wollen wir die räumliche Metrik γ_{jk} bestimmen. Mit (5.18) erhalten wir

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \Omega^2 r^2/c^2} d\varphi^2. \quad (5.34)$$

Berechnen wir damit den Kreisumfang bei festem Radius r , erhalten wir

$$U = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2/c^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2/c^2}} > 2\pi r.$$

Ein Beobachter im beschleunigten Bezugssystem wird dieses Resultat als hyperbolische Krümmung des Raumes interpretieren.

5.6 Schwaches Gravitationsfeld

In einem schwachen Gravitationsfeld $\phi(\mathbf{r}) \ll c^2$ und bei kleinen Geschwindigkeiten sollten die Geodätengleichungen (5.6) in die newtonschen Gleichungen

$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ übergehen. Die nichtrelativistische Wirkung für ein Teilchen im Gravitationsfeld hat die Gestalt

$$S_{\text{nr}} = -mc \int dt \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right),$$

wobei wir im Vergleich zum konventionellen Ausdruck, die Konstante $\int dt mc^2$ (Ruheenergie) addiert haben. Ein Vergleich mit dem kovarianten Ausdruck (5.2) liefert die Bogenlänge

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt. \quad (5.35)$$

Quadrieren dieses Ausdrucks, unter Berücksichtigung nur der führenden Terme in v/c und ϕ/c^2 , liefert das Resultat

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi)dt^2 - d\mathbf{r}^2, \quad (5.36)$$

wobei wir $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ benutzt haben. Die Komponente g_{00} hat daher im nichtrelativistischen Grenzfall den Wert

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}; \quad (5.37)$$

zudem $g_{0j} = 0$ und $g_{jk} = -\delta_{jk}$. Die räumliche Metrik ist daher einfach $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$, d. h. der Raum ist euklidisch.

Bei der Berechnung der Christoffel-Symbole ist zu beachten, dass in der besprochenen Näherung, wegen dem zusätzlichen Faktor c , die Terme $dx^0/d\tau = cdt/d\tau$ in den Geodätengleichung über die Terme $dx^j/d\tau$ dominieren. Das relevante Christoffel-Symbol ist daher $\Gamma^j_{00} = \partial\phi/c^2 \partial x^j$, womit die Geodätengleichung zur Newtonsgleichung wird mit $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, vgl. Gl. (5.13).

Mit dem Ausdruck (5.14) erhalten wir die gravitationelle Rotverschiebung

$$d\tau = \sqrt{1 + 2\phi/c^2} dt \approx (1 + \phi/c^2) dt, \quad (5.38)$$

d. h. die Eigenzeit eines Beobachters im Gravitationsfeld mit $\phi < 0$ vergeht langsamer.

5.7 Schwarzschild-Metrik

Wir haben kennengelernt, dass Materie sich in einem allgemeinen Bezugssystem auf einer Geodäte bewegt (Licht bewegt sich auf Nullgeodäten mit $ds = 0$). Mit dem Äquivalenzprinzip ist daher die Bewegung der Materie in einem beliebigen Gravitationsfeld bestimmt. Allerdings benötigt man die Metrik in einem Raum mit Körpern, welche sich mittels der Gravitationskraft gegenseitig beeinflussen. Dies leistet gerade die einsteinschen Gleichungen,

welche die Feldgleichungen für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ darstellen. In diesen tritt als Quelle des Feldes die Energie-Impulsverteilung der Materie und der Strahlung ein. Damit beeinflussen sich die Metrik einerseits und die Materie und die Strahlung andererseits gegenseitig — im Unterschied zur SRT. Wir werden die einsteinschen Gleichungen in dieser Einführung nicht kennenlernen können, da uns die nötigen Voraussetzungen aus der Differentialgeometrie fehlen.

Schwarzschild fand die folgende sphärisch-symmetrische, exakte Lösung der einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (5.39)$$

mit einer punktförmigen Quelle am Ursprung, wobei r_s ein Parameter ist, dessen physikalische Bedeutung wir später kennenlernen werden. Die Parameter der Karte sind definiert auf $r > r_s$, $0 \leq \theta < \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Für $r \rightarrow \infty$ wird die Metrik asymptotisch zur Minkowski-Metrik (in Polarkoordinaten)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.40)$$

somit stellen t die Zeit und \mathbf{r} die Koordinaten eines (unendlich-entfernten) Beobachters in einem Inertialsystem dar. Beim Schwarzschild-Radius $r = r_s$ wird die Karte singulär und die Öffnung der Lichtkegel mit $ds = 0$ strebt gegen null. Die äußert sich darin, dass die Rotverschiebung divergiert, da die Eigenzeit gegeben ist durch

$$d\tau = \sqrt{1 - r_s/r} dt, \quad (5.41)$$

so dass für $r \rightarrow r_s$ die Zeit für den externen Beobachter immer langsamer zu vergehen scheint. Allerdings wird nur die verwendete Karte und nicht die Metrik singulär. Die kann man daran erkennen, dass $\det g = -r^4 \sin^2\theta$ bei $r = r_s$ nicht verschwindet. In der Tat erkennen wir, dass am Ereignishorizont sich die Signatur der Koordinaten t und r vertauschen und somit Radius und Zeit ihre Rollen umdrehen.

Betrachten wir als Beispiel Licht, dass sich Radial auf den Schwarzschild-Radius zubewegt. Da sich das Licht auf einer Nullgeodäte bewegt, ist die Bewegung bestimmt durch $ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$. Die Nullgeodätengleichung daher die einfache Form³

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (5.42)$$

und somit

$$\frac{cdt}{dr} = \pm(1 - r_s/r)^{-1}, \quad (5.43)$$

³Diese Form folgt auch aus der allgemeinen Geodätengleichung (5.58) mit $V(r) = 0$, wegen $L = l = 0$.

wobei das Vorzeichen $+$ ($-$) der auslaufenden (einlaufenden) radialen Nullgeodäte entspricht. Integration liefert das Resultat

$$c(t - t_0) = \pm[r + r_s \log(r - r_s)]. \quad (5.44)$$

Somit wirkt es für einen unendlich entfernten Beobachter so, als ob das Licht eine unendliche Zeit braucht, um den Schwarzschild-Radius zu erreichen. Dies ist eine Manifestation der unendlichen Rotverschiebung. Der Abstand s eines Beobachters zum Ereignishorizont ist gegeben durch

$$\begin{aligned} s &= \int_{r_s}^r dr' \sqrt{-g_{rr}} = \int_{r_s}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - r_s/r'}} \\ &= \sqrt{r(r - r_s)} + r_s \log\left(\sqrt{r/r_s} - 1 + \sqrt{r/r_s}\right) > r - r_s. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dieser Abstand ist zwar immer größer als $r - r_s$, aber er ist nicht unendlich. Der Schwarzschild-Radius befindet sich also für einen äußeren Beobachter durchaus in einer wohl definierten Entfernung.

5.7.1 Eddington-Finkelstein-Metrik

Um die Singularität der Schwarzschild Karte zu beheben, wollen wir eine neue Zeitkoordinate v einführen, so dass die einlaufenden Nullgeodäten zu Geraden mit $v = \text{konst.}$ werden. Dies wird erreicht durch die folgende Koordinationstransformation erreicht,

$$cv = ct + r + r_s \log|r - r_s|, \quad (5.46)$$

so dass die auslaufende radiale Nullgeodätengleichung zu $v = t_0$ wird, vgl. (5.44). Differentiation führt auf

$$cdv = cdt + (1 - r_s/r)^{-1}dr$$

und damit erhält man das Eddington-Finkelstein-Linienelement

$$ds^2 = c^2(1 - r_s/r)dv^2 - 2cdvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.47)$$

Man erkennt, dass das Linienelement regulär ist bei $r = r_s$. Damit setzt die Eddington-Finkelstein-Metrik die Schwarzschild-Metrik analytisch fort. Betrachtet man nun Nullgeodäten in den neuen Koordinaten, dann hat man nach Konstruktion $v = t_0$ für die einlaufenden Geodäten. Einlaufende Lichtstrahlen gehen daher einfach durch den Schwarzschild-Radius durch.

Die auslaufende radiale Nullgeodäte ist bestimmt durch $ds^2 = d\theta = d\varphi = 0$. Die Lösung mit $dv = 0$ liefert die einlaufende Nullgeodäte, daher finden wir für ein auslaufendes Lichtteilchen die Geodätengleichung

$$\frac{cdv}{dr} = \frac{2}{1 - r_s/r} \quad (5.48)$$

mit der Lösung [vgl. (5.43)]

$$c(v - v_0) = 2(r + r_s \log |r - r_s|). \quad (5.49)$$

oder ausgeschrieben in den ursprünglichen Koordinaten

$$c(t - t_0) = r + r_s \log |r - r_s|. \quad (5.50)$$

Damit können die auslaufenden Lichtteilchen, den Schwarzschild-Radius nicht durchqueren. Die Fläche $r = r_s$ wirkt daher wie eines halbdurchlässiges Membran, dass Lichtteilchen nur von Außen nach Innen durchlässt. Daher wird der Schwarzschild-Radius auch Ereignishorizont genannt, bildet er doch die Grenze aller Ereignisse, die prinzipiell von einem äußeren Beobachter erfasst werden können.

5.7.2 Nichtrelativistischer Grenzfall

Für kleine Geschwindigkeiten $dr/dt \ll c$ und große Entfernungen $r \gg r_s$ (das heißt im nichtrelativistischen Limes) wird die Schwarzschild-Metrik zu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.51)$$

Ein Vergleich mit (5.36) zeigt, dass die Schwarzschild-Metrik ein Gravitationspotential der Form $\phi = -c^2 r_s / 2r$ beschreibt. Für ein Objekt der Masse M gilt in der klassischen Physik $\phi = -GM/r$ mit der Gravitationskonstanten $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$. Damit erhält man den Ausdruck

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.52)$$

für den Schwarzschild-Radius ausgedrückt durch Masse des Zentralobjektes. Für die Sonne mit $M_\odot \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ gilt zum Beispiel $r_s \approx 3 \text{ km}$.

5.7.3 Metrik in der Nähe des Ereignishorizonts

In der Nähe des Ereignishorizonts führen wir die neuen Radialkoordinate h mit $r = r_s + h^2/4r_s$ ein. Entwicklung der Schwarzschild-Metrik für $h \ll r_s$ führt auf die Metrik

$$ds^2 = \frac{h^2}{4r_s^2} c^2 dt^2 - dh^2 - r_s^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.53)$$

Damit ist die Raumzeit in der Nähe des Ereignishorizonts durch die Rindler-Metrik gegeben (5.21). Hier spielt die Zeit t eines unendlich entfernten Beobachters die Rolle der Rapidität mit $\chi = ct/2r_s$ und der Abstand vom Ereignishorizont h entspricht der Beschleunigung via $a = c^2/h$. Damit kann man

die Umgebung eines Schwarzen Loches mit Abb. 5.1 verstehen. Der Rindler-Horizont mit $h = 0$ spielt die Rolle des Ereignishorizonts, wo die Karte Singular wird. Die Ereignishorizont liegt für den entfernten Beobachter bei $t = \pm\infty$ (entspricht in der Abbildung $\chi = \pm\infty$), da Objekte, welche sich darauf zubewegen immer stärker rotverschoben werden. Dadurch, dass die Schwarzschild-Metrik in der Nähe des Ereignishorizontes zur Rindler-Metrik wird, tritt auch der Unruh-Effekt dort auf. In diesem Kontext wird die Strahlung, welche vom Ereignishorizont durch Quantenfluktuationen ausgestrahlt wird, Hawking-Strahlung genannt.

5.7.4 Geodäten

Die Lagrange-Funktion zum Variationsprinzip der Geodäten (5.5) lautet für die Schwarzschild-Metrik

$$L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} - r^2 \left(\frac{d\theta^2}{d\tau^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right). \quad (5.54)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für θ

$$-\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau}\right) + \left(r \frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (5.55)$$

ist identisch erfüllt für eine Bahn in der Äquatorebene mit $\theta = \pi/2$, was wir o.B.d.A. voraussetzen wollen.⁴ Damit wird der Lagrangian zu

$$L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} - \left(\frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right)^2. \quad (5.56)$$

Da die Variablen φ und t zyklisch sind, gelten die Erhaltungssätze $r^2 d\varphi/d\tau = l$ (Drehimpuls) und $c(1 - r_s/r) dt/d\tau = \mathcal{E}$ („Energie“). Da die Lagrange-Funktion durch $L = (ds/d\tau)^2$ gegeben ist, bleibt auch sie erhalten. Für massive Objekte gilt $L = c^2$, während für Licht $L = 0$ ist.

Einsetzen der zyklischen Variables in (5.56) ergibt

$$L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\mathcal{E}^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2}\right) - \frac{l^2}{r^2}. \quad (5.57)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) = \mathcal{E}^2 \quad (5.58)$$

mit dem „Potential“

$$V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(L + \frac{l^2}{r^2}\right). \quad (5.59)$$

⁴Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann man immer ein Koordinatensystem wählen, so dass die Bahn in dieser Ebene verläuft.

Es ist zweckmäßig, die Variable $u = 1/r$ einzuführen. Aus $du/d\tau = -u^2 dr/d\tau$ und $d\varphi/d\tau = lu^2$ folgt für $u' = du/d\varphi$

$$u'^2 = \left(\frac{du/d\tau}{d\varphi/d\tau} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - V}{l^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{l^2} - (1 - r_s u) \left(\frac{L}{l^2} + u^2 \right) \quad (5.60)$$

Leitet man die Gleichung nach φ ab und dividiert anschließend durch $2u'$, erhält man das Resultat

$$u'' + u - \frac{1}{2}L \frac{r_s}{l^2} = \frac{3}{2}r_s u^2. \quad (5.61)$$

Die Gleichung kann mit elliptischen Funktionen explizit gelöst werden. Im Folgenden werden wir ein paar Spezialfälle betrachten.

5.7.5 Periheldrehung

Betrachten wir die Bewegung eines massiven Objektes mit $L = c^2$, dann lautet (5.61)

$$u'' + u - c^2 \frac{m}{l^2} = 3mu^2 \quad (5.62)$$

mit $m = r_s/2 = GM/c^2$. In der newtonschen Physik gilt für die Bewegung eines Körpers um ein Zentralgestirn (Kepler-Problem)

$$\dot{r}^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{l^2}{r^2} = 2E, \quad \dot{\varphi} = l/r^2. \quad (5.63)$$

Damit erhalten wir für $u = 1/r$

$$u'' + u - \frac{GM}{l^2} = 0. \quad (5.64)$$

Der Vergleich von (5.62) und (5.61) zeigt, dass (abgesehen von $\mathcal{E}^2 - 1 = 2E$) der Term proportional zu u^2 die relativistische Korrektur darstellt. Dieser Term entspricht dem Term $\propto r^{-3}$ in (5.59).

Die allgemeine Lösung von (5.64) hat die Form

$$u_0 = \frac{1}{d} [1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (5.65)$$

mit $d = l^2/GM$. Für $0 < \varepsilon < 1$ ist die Bahn eine Ellipse. Das Perihel befindet sich dabei bei $\varphi = \varphi_0 + 2\pi\mathbb{Z}$. Durch eine Rotation des Koordinatensystems können wir erreichen, dass $\varphi_0 = 0$ ist.

Als nächstes wollen wir relativistische Korrekturen zu den Kepler-Bahnen finden. Dazu setzen wir $u = u_0 + u_1$ und erhalten (in erster Ordnung in m)

$$u_1'' + u_1 = \frac{3m}{d^2} (1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi). \quad (5.66)$$

Mit den Anfangsbedingungen $u_1 = u'_1 = 0$ beim Perihel ($\varphi = 0$) haben die drei Gleichungen ($A_1 = 3m/d^2$, $A_2 = 6m\varepsilon/d^2$, $A_3 = 3m\varepsilon^2/d^2$)

$$u_1'' + u_1 = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \cos \varphi \\ A_3 \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (5.67)$$

die Lösungen

$$u_1 = \begin{cases} A_1(1 - \cos \varphi) \\ \frac{1}{2}A_2\varphi \sin \varphi \\ A_3[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi) - \frac{1}{3} \cos \varphi]. \end{cases} \quad (5.68)$$

Nur der zweite Term liefert einen Beitrag zu

$$u'(2\pi) = A_2\pi = \frac{6\pi m\varepsilon}{d^2}. \quad (5.69)$$

Wegen $u''(2\pi) = -\varepsilon/d$ (zur 0. Ordnung) ist die Perihel-Verschiebung (die Verschiebung der Nullstelle von u') gegeben durch

$$\Delta\varphi = -\frac{u'(2\pi)}{u''(2\pi)} = \frac{6\pi m}{d} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \varepsilon^2)}, \quad (5.70)$$

wobei a die große Halbachse der Ellipsenbahn ist. Für Merkur ergibt sich $\Delta\varphi \approx 43''$ pro Jahrhundert ($'' =$ Bogensekunden), was heute auf 1% bestätigt ist. Beachten Sie, dass andere Störungen etwa einen Faktor zehn mal größer sind.

5.7.6 Lichtablenkung

Wir betrachten als nächstes lichtartige Geodäten mit $L = 0$. Dann lautet (5.61)

$$u'' + u = 3mu^2. \quad (5.71)$$

Die Gleichung $u'' + u = 0$ beschreibt gerade Lichtstrahlen mit $u_0 = b^{-1} \sin \varphi$, wobei das Perihel bei $\varphi = \pi/2$ gewählt wurde. Die Nullstelle $\varphi = 0, \pi$ von u_0 entspricht der Richtung, der Asymptote für $r \rightarrow \infty$.

Wie oben betrachten wir den Einfluss der ART mit Störungsrechnung. In erster Ordnung in m müssen wir die Gleichung

$$u_1'' + u_1 = \frac{3m}{b^2} \sin^2 \varphi. \quad (5.72)$$

lösen. Wir erhalten mit $u_1 = u'_1 = 0$ beim Perihel die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{3m}{b^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2\varphi) - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi \right] \\ &= \frac{\varphi}{b} + \frac{3m}{b^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) + O(m^2), \end{aligned} \quad (5.73)$$

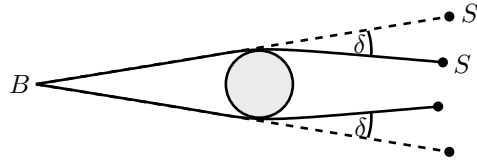


Abb. 5.2: Skizze der Ablenkung des Licht, welches von einem Stern an der Position S ausgesandt wird und bei B detektiert wird. Das Licht wird auf Grund der Masse der Sonne (grauer Kreis) abgelenkt und der Stern steht damit scheinbar an der Position S' was einer Winkelverschiebung von δ entspricht.

d. h. die Nullstelle von u verschiebt sich zu $\varphi_\infty = -2m/b$ Die Gesamtabweichung beträgt

$$\delta = 2|\varphi_\infty| = \frac{4GM}{c^2 b} \approx \frac{1.75''}{b/R_\odot} \quad (5.74)$$

siehe Abb. 5.2. Dieser Effekt kann bei einer totalen Sonnenfinsternis beachtet werden. Die experimentelle Übereinstimmung liegt etwa bei 1%.

5.7.7 Stabilität der kreisförmigen Orbits

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, für welche Radien $r \geq r_s$ es möglich ist, eine (stabile) kreisförmige Bewegung auszuführen. Für ein Objekt auf einer kreisförmigen Bahn muss gelten, dass die Radialkraft

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r^4} (c^2 r_s r^2 - 2l^2 r + 3l^2 r_s) \quad (5.75)$$

verschwindet. Das ist dann der Fall, wenn die zwei anziehen Kräfte, die newtonsche Gravitation (erster Term) und der relativistische Term (dritter Term), sich gegen die Zentrifugalkraft (zweiter Term) wegheben.⁵ Der Drehimpuls ist dann durch

$$l^2 = \frac{c^2 r^2}{2r/r_s - 3} \quad (5.76)$$

Für einen bestimmten Drehimpuls hat die quadratische Gleichung (5.75) die zwei Lösungen

$$r_> = \frac{l^2}{c^2 r_s} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_s^2}{l^2}} \right), \quad r_< = \frac{l^2}{c^2 r_s} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3c^2 r_s^2}{l^2}} \right) = \frac{3l^2 r_s}{c^2 r_>}$$

Für kleine Radien (kleiner als $r_<$) dominiert in (5.75) der anziehende relativistische Term. Damit ist für Radien zwischen $r_<$ und $r_>$ ist die Kraft

⁵Beachten Sie, dass wir die potentielle Energie in (5.59) für ein Teilchen mit Masse 2 definiert haben.

abstoßend und für große Radien (größer als $r_>$) wird sie wieder anziehend. Damit ist die Bahn bei $r_<$ instabil gegen kleine Störungen, da z. B. wenn sich der Radius ein wenig verkleinert, das Teilchen sich gegen das Zentrum beschleunigt.

Die stabile Bahn bei $r_>$ existiert für $r \geq 3r_s$ ($l^2 \leq 3r_s^2 c^2$). Bei $r = 3r_s$ haben wir $|l| = r^2 |d\varphi/d\tau| = \sqrt{3}cr_s$. Für die instabile Bahn erhalten wir das Resultat $\frac{3}{2}r_s \leq r \leq 3r_s$, wobei die untere Grenze einem Drehimpuls $|l| \rightarrow \infty$ entspricht. Für Radien $r < \frac{3}{2}r_s$ gibt es keine Kreisbahnen (nicht mal instabile).

Wir wollen als nächstes bestimmen, welche Geschwindigkeit $v = rd\varphi/d\tau_s$ eine Körper besitzt, der ein Schwarzes Loch im Abstand r umkreist, gemessen von einem stationären Beobachter am gleich Abstand mit Eigenzeit τ_s . Wir wissen, dass $l/r = rd\varphi/d\tau$. Damit müssen wir nur noch die Zeit auf die Eigenzeit τ_s eines stationären Beobachters umrechnen. Wir haben $d\tau/d\tau_s = \gamma^{-1}$, mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ die Zeitdilatation der bewegten Körpers bezüglich des statischen Beobachters. Somit ergibt sich die Gleichung $v = \gamma^{-1}l/r$ mit der Lösung

$$v = \frac{c}{\sqrt{2(r/r_s - 1)}} \quad (5.77)$$

wobei wir (5.76) benutzt haben. Beim kritischen Radius $r = 3r_s$ für die stabile Kreisbewegung ist die Geschwindigkeit daher $v = \frac{1}{2}c$ und beim Radius $r = \frac{3}{2}r_s$, unterhalb dessen es keine Kreisbewegung mehr gibt, gilt $v = c$. Die Kreisbewegung ist daher stabil für $0 < v < \frac{1}{2}c$ und instabil bei $\frac{1}{2}c < v < c$. Da sich Licht immer mit Lichtgeschwindigkeiten ausbreiten, sind die kreisförmigen Nullgeodäten nur beim Radius $r = \frac{3}{2}r_s$ vorhanden (kann man direkt als Lösung der Nullgeodäten herleiten). Photonen sind daher auf dem Radius $r = \frac{3}{2}r_s$ gebunden und man nennt diesen Radius daher auch Photonen-Kugel.

Anhang A

Tensoren

Wir betrachten einen reellen (endlichdimensionalen) Vektorraum V . Dann sind r -fach kovariante und s -fach kontravariante Tensoren multilineare Abbildungen

$$\mathbb{T} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s\text{-mal}} \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

mit V^* dem Dualraum zu V , d. h. V^* ist der Vektorraum der linearen Abbildungen $V \mapsto \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass der Raum der (r, s) -Tensoren $\mathcal{T}_r^s(V)$ wiederum einen Vektorraum bildet. So gilt zum Beispiel

$$\mathcal{T}_0^0 = \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}_1^0 = V^*, \quad \mathcal{T}_0^1 = V^{**} = V. \quad (\text{A.2})$$

Im speziellen ist ein Skalarprodukt $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_2^0$, d. h. zweifach kovariant.

Sei nun $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ eine Basis von V und $\mathbf{e}^{*1}, \dots, \mathbf{e}^{*n}$ die dazugehörige duale Basis von V^* mit $\mathbf{e}^{*i}(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Mit einer Basis können wir den Tensor \mathbb{T} durch seine Komponenten $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ ausdrücken via

$$\mathbb{T} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \mathbf{e}^{*i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{*i_r} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_s}, \quad (\text{A.3})$$

wobei wir die einsteinsche Summenkonvention verwendet haben.

Auf den Tensoren lassen sich folgende Operationen definieren:

Addition und Multiplikation mit Skalar: Mit $S, T \in \mathcal{T}_r^s$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $aS + bT \in \mathcal{T}_r^s$ mit

$$(aS + bT)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = aS_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + bT_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s};$$

d. h. \mathcal{T}_r^s ist ein Vektorraum.

Tensorprodukt: Mit $S \in \mathcal{T}_{r_1}^{s_1}$ und $T \in \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}$ ist das Tensorprodukt $S \otimes T \in \mathcal{T}_r^s$ mit $r = r_1 + r_2$, $s = s_1 + s_2$ definiert durch

$$(S \otimes T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = S_{i_1 \dots i_{r_1}}^{j_1 \dots j_{s_1}} T_{i_{r_1+1} \dots i_r}^{j_{s_1+1} \dots j_s}$$

Verjüngung/Kontraktion: Aus einem Tensor $T \in \mathcal{T}_r^s$ kann man durch Verjüngung/Kontraktion einen Tensor $S = K_k^l T \in \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}$ erhalten. Mit $1 \leq k \leq r$ und $1 \leq l \leq s$ definieren wir

$$S_{i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}} = T_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_r}^{j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_s}.$$

Hinweis: für $T \in \mathcal{T}_1^1$ entspricht K_1^1 gerade der Spurbildung, $K_1^1 T = \text{tr } T$.

Skalarprodukt

In physikalischen Anwendungen haben wir meistens ein ausgezeichnetes Skalarprodukt $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{T}_2^0$. In Komponenten wird dieses durch die symmetrische Matrix $g_{ij} = g_{ji}$ ausgedrückt. Dieses erlaubt es einem Indizes hoch- bzw. runterzuziehen. Im Besonderen ist das Skalarprodukt in Komponenten gegeben durch

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j = v_j w^j = v^i w_j \quad (\text{A.4})$$

mit der Operation des Herunterziehens $v_j = g_{ji} v^i$ und $w_j = g_{ji} w^i$. Durch invertieren dieser Beziehung erhalten wir $v^i = g^{ij} v_j$ mit der Inversen $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$, so dass $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

Euklidischer Raum

Der euklidische Raum \mathbb{R}^3 mit kartesischer Basis ist definiert durch das Skalarprodukt $g_{ij} = \delta_{ij}$. In diesem Raum wirkt das hoch- bzw. runterziehen trivial und daher werden die Indizes meistens nur unten geschrieben. Im Allgemeinen interessieren wir uns, wie Tensoren unter einem Basiswechsel transformieren. Wie schon in Kap. 1 gesehen, transformieren die Komponenten von Vektoren $\mathbf{r} \in \mathcal{T}_0^1$ wie $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$. Wegen dem trivialen Skalarprodukt ist gibt es keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianter Transformation und wir erhalten, dass sich ein allgemeiner Tensor wie

$$T'_{i_1 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (\text{A.5})$$

transformiert.

Minkowski Raum

Der Minkowski Raum wird durch das Lorentz-Skalarprodukt $g_{ij} = \eta_{ij}$ definiert mit

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

da $\eta^{-1} = \eta$. Betrachten wir nun eine Basistransformation Λ unter der die Komponenten eines Vektors wie $\mathbf{r}' = \Lambda \mathbf{r}$ transformieren. Wir schreiben dies unter Berücksichtigung der korrekten Hochstellung als $r'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} r^{\mu}$. Durch runterziehen der Indizes erhalten wir analog die Transformationsregel für einen kovarianten Vektor als $r'_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} r_{\mu}$ mit

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \eta_{\nu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\tau} \eta^{\tau\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Ein allgemeiner Tensor transformiert unter daher einer Basistransformation wie

$$T'_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s} = \Lambda_{i_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}_{\nu_s} T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}. \quad (\text{A.8})$$

Tensoren, welche so transformieren, werden auch Vierer- oder Lorentz-Tensoren genannt.

Tensorfelder

Beachten Sie, dass auf Grund der festgelegte Transformationsregel (A.5) bzw. (A.8) Gleichungen zwischen Tensoren der gleichen Stufe automatisch kovariant sind. Diese schöne Eigenschaft lässt sich (punktweise) auf Tensorfelder $T_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s}(t, \mathbf{r})$ verallgemeinern. Tensorfelder erlauben es zusätzlich neben den obengenannten Operationen auch Ableitungsoperationen zu definieren.

Im euklidischen Raum ist der Gradient $S = \partial T$ von $T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r})$ automatisch ein Tensor der Stufe $n + 1$ definiert durch

$$S_{ki_1 \dots i_n} = (\partial T)_{ki_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial r_k} T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.9})$$

Mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial r'_k} = \frac{\partial r_l}{\partial r'_k} \frac{\partial}{\partial r_l} = \frac{\partial[(R^{-1})_{lm} r'_m + \text{const}]}{\partial r'_k} \frac{\partial}{\partial r_l} = (R^{-1})_{lk} \frac{\partial}{\partial r_l} = R_{kl} \frac{\partial}{\partial r_l}$$

ist es nun einfach zu sehen, dass S auch wirklich wie ein Tensor unter Koordinatenwechsel transformiert. In der Tat erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r'_k} T'_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}') = R_{kl} R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial r_k} T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}).$$

Im Minkowski Raum kann man zeigen, dass der Gradient $S = \partial T$ eines (r, s) -Tensors ein $(r + 1, s)$ -Tensor ist. Analog zum euklidischen Fall, erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial[(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\sigma} x'^{\sigma} + \text{const}]}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

Und daher transformiert S auch wirklich wie ein $(r + 1, s)$ -Tensor mit dem Transformationsgesetz

$$\begin{aligned}
 S'_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{j_1 \dots j_s}(x') &= \partial_{x'^{\mu}} T'_{i_1 \dots i_r}{}^{j_1 \dots j_s}(x') \\
 &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda_{i_1}{}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}{}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}{}_{\nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \\
 &= \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda_{i_1}{}^{\mu_1} \dots \Lambda_{i_r}{}^{\mu_r} \Lambda^{j_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{j_s}{}_{\nu_s} S_{\nu \mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}(x).
 \end{aligned}$$